Linealidad de la iteración del operador Suma sobre multi-índices

Mat. Enrique Torres Miguel
kike_torres@ciencias.unam.mx

21 de agosto de 2022

Resumen

Se estudia la propiedad lineal del operador Σ sobre multi-índices representados por composiciones de números naturales, en analogía al caso concencional de iteración, se presenta el teorema de linealidad en la iteración y se muestra que el teorema multinomial es una resultado particular de esta propiedad.

1. Introducción

Las sumas sobre las funciones aritméticas cuando la operación se realiza sobre particiones con repetición de un número natural no es algo que se estudie a menudo, esto hace parecer que realizar iteraciones para este caso resulte una tarea nada grata. Sin embargo, una vez que se tienen los elementos necesarios es sorprendente la facilidad con la se van dando los conceptos y los resultados. El primer paso es entender el concepto de partición y partición con repetición de un número natural.

1.1. Particiones de un número natural

Definición 1.1 *Una partición de un número natural* $\mathbf{w}$ *es una suma de números naturales cuyo total es* $\mathbf{w}$ *en la que es irrelevante la repetición y orden de los sumandos, también se considera a* $\mathbf{w}$ *como una partición de si mismo.*

Para ver un ejemplo de esto consideremos el número 7,

Ejemplo 1.2

$$\begin{aligned}
7 &= 1+1+1+1+1+1+1 = 3+3+1 = 2+2+2+1 = 5+2 \\
&= 4+2+1 = 1+1+5 = 4+1+1+1 = 1+1+1+1+1+2 \\
&= 3+4 = 6+1 = 2+2+1+1+1 = 2+3+1+1 = 2+2+3 \\
&= 3+1+1+1+1,
\end{aligned}$$

Como se puede advertir en el ejemplo anterior, en las particiones el orden de los sumando es irrelevante pues

$$3+3+1 = 3+1+3 = 1+3+3,$$

representan la misma partición de *7*. Normalmente a las permutaciones de los sumando en las particiones se les conoce como composiciones o particiones con repetición.

Por otra parte, notemos otra característica de las particiones del número *7*,

$$\begin{aligned}
7 &= 7 \\
&= 6+1 = 4+3 = 5+2 \\
&= 4+2+1 = 1+3+3 = 2+2+3 = 5+1+1 \\
&= 4+1+1+1 = 2+2+2+1 = 2+3+1+1 \\
&= 3+1+1+1+1 = 2+2+1+1+1 \\
&= 2+1+1+1+1+1 \\
&= 1+1+1+1+1+1+1
\end{aligned}$$

Como podemos ver las particiones pueden clasificarse según el número de sumandos.

Observación 1.3 *Sea $\boldsymbol{w} \in \mathbb{N}$, entonces se tiene lo siguiente*

i) $\forall p \in \mathbb{N}$ *con* $1 \leq p \leq w$, *existe al menos una partición de* $\boldsymbol{w}$ *con exactamente* p *sumandos, es decir,* $w = k_1 + \cdots + k_p$.

Esto es inmediato pues basta considerar $k_i = w - p + 1$ *y* $k_j = 1 \, \forall j \neq i$

ii) Para cualquier partición de p *elementos tal que* $\boldsymbol{w} = k_1 + \cdots + k_p$ *se tiene que,*

$$n = \boldsymbol{w} - p + 1 \geq k_i \, \forall i$$

Por el inciso anterior, es claro que n *es un sumando de al menos una partición de* p *elementos de* $\boldsymbol{w}$*, por lo tanto solo falta ver que es mayor o igual que cualquier sumando de cualquier partición de* p *elementos.*

Demostración.

Sin pérdida de generalidad podemos descartar la partición trivial, esto es cuando $p = 1$ *ya que es inmediato, ahora supongamos que existe una partición de* $\boldsymbol{w}$ *tal que* $\boldsymbol{w} = k_1 + \cdots + k_p$ *y* $k_i > n$ *para algún* i*. Recordemos que para cualquier partición* $1 \leq k_j$*, entones sumando las desigualdades* $\forall j \neq i$ *se tiene que*

$$p - 1 \leq \sum_{\forall j \neq i} k_j$$

y como suponemos que $n < k_i$*, entonces sumando las dos desigualdades anteriores se tiene que*

$$n + p - 1 < k_i + \sum_{\forall j \neq i} k_i = k_1 + \cdots + k_p$$

lo cual es un absurdo pues $\boldsymbol{w} = k_1 + \cdot + k_p$ *y* $n = \boldsymbol{w} - p + 1$. *Claro el absurdo surge de suponer que existe un sumando de alguna partición de p elementos, mayor que n.*

■

Ahora que ya contamos con lo necesario podemos empezar a establecer la idea de iteraciones para el caso de multi-índices.

1.2. Suma sobre multi-índices versión convencional

De forma usual se denota al conjunto de las funciones aritméticas como $A(\mathbb{N}) = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}\}$. Recordemos el caso cuando solo se utiliza un indice en la sumatoria. Sea $f \in A(\mathbb{N})$ y $n \in \mathbb{N}$. La función suma de f definida por el operador Σ, es la función aritmética g tal que

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + \cdots + f(n).$$

Aquí es donde comienza el análisis que nos ayudará a entender la sumatoria sobre varios índices, pues la expresión anterior pude ser descrita y entendida de una forma diferente, veamos el porque.

Cuando escribimos la expresión,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)$$

se puede considerar de forma equivalente como la suma sobre las composiciones de dos elementos de un número natural, es decir,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k+s=n+1} f(s).$$

Explicar porque esta equivalencia es cierta es sencillo, ya que todas las composiciones de dos elementos del número *n+1* son de la forma $k+(n+1-k) = n+1$ donde $1 \leq k \leq n$.

Sin embargo, la naturaleza de las expresiones

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)$$

y

$$\sum_{k+s=n+1} f(s),$$

pese a denotar la misma suma, es muy diferente y por tal motivo merecen un estudio a detalle.

Primero,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k),$$

se entiende como la indización los sumandos empleando el orden usual de los números naturales, pues recordemos que la suma se realiza sobre funciones aritméticas entonces resulta inmediato la elección natural en el orden de los valores,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) + f(n).$$

Por otra parte, al denotar

$$\sum_{k+s=n+1} f(k),$$

como se ha mencionado, se considera las composiciones de dos elementos del número *n+1* de la forma $k + (n+1-k) = n+1$ siendo $1 \leq k \leq n$, claro la elección de los sumandos también puede considerarse con el orden usual por la relación intrínseca que existe en ambos casos. Sin embargo, la naturaleza de este caso se pone de manifiesto en el caso general, cuando se consideran composiciones de p elementos de un número natural w, el orden usual en la elección los sumando carece de sentido por las repeticiones en la forma que se puede escindir el número w y por otro lado, se presenta el reto de definir de forma adecuada la suma sobre composiciones arbitrarias aplicadas a todas la funciones aritméticas sin la necesidad de prescindir de casos particulares, en concreto lo que se pretende es logar que la siguiente expresión tenga sentido para cualquier función aritmética *f*,

$$\sum_{k_1+\cdots+k_p=w} f(k_i).$$

Existen diversas e interesantes formas de definir las sumas sobre composiciones de números naturales, la que se ha elegido ayuda a converger los resultados del caso convencional de suma de funciones aritméticas y está estrechamente ligada con las dos propiedades estudiadas en la **Observación1.3**. Primero, necesitamos pensar la forma adecuada para correr la suma sobre $k_1 + k_2 \cdots + k_{p-1} + k_p = w$, es decir, sobre composiciones arbitrarias de números naturales, esto es sencillo ya que como puede notarse en el caso de composiciones de dos elementos, hay que considerar un parámetro fijo de la composición y realizar la suma sobre todos los valores posibles de ese parámetro, al hacer esto es necesarios aclarar que no se considera el orden usual de los números naturales, pues el parámetro depende únicamente de la composición en cuestión y por otra parte, es irrelevante el parámetro a determinar ya que al trabajar sobre composiciones de un número w, todos los sumando puede tomar cada valor de dicha composición por la definición de composición de números naturales.

Segundo e igualmente importante, el otro reto es eludir los casos indeterminados, pues es claro que la expresión $k_1 + k_2 \cdots + k_{p-1} + k_p = w$, carece de sentido sí el número de sumandos es mayor a w. Pero esto se resuelve de forma inmediata al decir que trabajamos sobre composiciones de números naturales, estamos considerando solo expresiones $k_1 + k_2 \cdots + k_{p-1} + k_p = w$ bien definidas, es más, la **Observación1.3** nos sirve para desarrollar de una forma más eficiente la expresión anterior pues cada composición de p elementos tiene una manera canónica de escindir a w, esto es, $w = n_p + p - 1$ donde n_p es el máximo de los sumandos de cualquier partición de p elementos del número w. Así la expresión $k_1 + k_2 \cdots + k_{p-1} + k_p = w$ será escrita como $k_1 + k_2 \cdots + k_{p-1} + k_p = n_p + p - 1$, de esta manera la suma se realizará sobre todos lo valores naturales de n_p para composiciones de p elementos.

Definición 1.4 *Sea $f \in A(\mathbb{N})$ y $p \in \mathbb{N}$. Diremos que la suma sobre muilti-índices de la función f, es la función aritmética h tal que*

$$h(n_p) = f_{(k_1^1, \cdots, k_r^1, \cdots, k_p^1)}(k_r^1) + \cdots + f_{(k_1^m, \cdots, k_r^m, \cdots k_p^i)}(k_r^m)$$

donde $k_1^x + \cdots + k_p^x = n_p + p - 1, \quad f_{(k_1^x, \cdots, k_r^x, \cdots, k_p^x)}(k_r^x) = f(k_r^x)$
y se denotará como,

$$h(n_p) = \sum_{k_1 + \cdots + k_p = n_p + p - 1} f(k_r) = \sum_{\mu_p^r(n)} f(k_r)$$

En la notación anterior r indica la posición del sumando en la composición sobre el que se aplicará la suma y se omite la referencia que n_p es el máximo de los sumando ya que tomara todos los valores naturales y como puede verse la suma considera a todas las composiciones de p elementos. Para entender esta definición mostraremos un ejemplo considerando composiciones de 4 elementos para una función aritmética f arbitraria evaluando los primeros tres valores naturales.

Ejemplo 1.5

$$\begin{aligned}
h(1) &= \sum_{\mu_4^3(1)} f(k_3) \\
&= \sum_{k_1+k_2+k_3+k_4=1+4-1} f(k_3) \\
&= f_{(1,1,1,1)}(1) = f(1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(2) &= \sum_{\mu_4^3(2)} f(k_3) \\
&= \sum_{k_1+k_2+k_3+k_4=2+4-1} f(k_3) \\
&= f_{(1,1,1,2)}(1) + f_{(1,1,2,1)}(2) + f_{(1,2,1,1)}(1) + f_{(2,1,1,1)}(1) \\
&= 3f(1) + f(2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(3) &= \sum_{\mu_4^3(3)} f(k_3) \\
&= \sum_{k_1+k_2+k_3+k_4=3+4-1} f(k_3) \\
&= f_{(1,1,1,3)}(1) + f_{(1,1,3,1)}(3) + f_{(1,3,1,1)}(1) + f_{(3,1,1,1)}(1) + \\
&\quad f_{(2,2,1,1)}(1) + f_{(2,1,2,1)}(2) + f_{(1,1,1,2)}(1) + f_{(1,2,2,1)}(2) + \\
&\quad f_{(1,2,1,2)}(1) + f_{(1,1,2,2)}(2) \\
&= 6f(1) + 3f(2) + f(1).
\end{aligned}$$

Una vez entendida la definición y notación anterior, se puede trabajar sin escritura excesiva, pues saber que la suma se realiza sobre todas las particiones de p elementos y que p es un parámetro fijo hacen más amigable el desarrollo de los resultados.

1.3. Suma sobre multi-índices versión multinomial

Para esta versión denotaremos a las funciones aritméticas definidas o extendidas en cero como $A^*(\mathbb{N}^*) = \{f \mid f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{C}\}$.

Recordemos que todas composición de p elementos tiene una representación canónica, $k_1+\cdots+k_p = n_p+p-1$, donde n_p es el máximo de todos los sumandos, pero esta expresión, a su vez, se puede rescribir como,

$$(k_1 - 1) + \cdots + (k_p - 1) = n_p - 1.$$

Y como en el caso anterior la suma se hace correr sobre todos los valores naturales de n_p entones esta expresión puede considerarse de forma equivalente como $r_1 + \cdots + r_p = N_p,\ \ donde\ \ r_1, ..., r_p, N_p \geq 0$. Es claro que se consideran sumas no negativas de p elementos, de un número no negativo N_p. Así por analogía al caso caso anterior podemos establecer la suma sobre un operador que involucre a los coeficientes multinomiales,

Definición 1.6 ***(Versión multinomil)*** *Sea $f \in A^*(\mathbb{N}^*)$ y $p \in \mathbb{N}$. Diremos que la suma de la función f sobre muilti-índices respecto del operador*

$$\sum_{r_1+\cdots+r_p=N_p} \binom{N_p}{r_1 \cdots r_p},$$

es la función h tal que,

$$h(N_p) = \sum_{r_1+\cdots+r_x+\cdots+r_p=N_p} \binom{N_p}{r_1 \cdots r_x \cdots r_p} f_{(r_1,\cdots,r_x,\cdots,r_p)}(r_x)$$

donde $r_1 + \cdots + r_x + \cdots + r_p = N_p$, $\quad f_{(r_1,\cdots,r_x,\cdots,r_p)}(r_x) = f(r_x)$
y se denotará como,

$$h(N_p) = \sum_{\beta_p^x(N_p)} f(r_x).$$

Nuevamente, x solo denota la posición del sumando sobre el cual se correrá la suma y como esta se aplica para todo $N_p \geq 0$, entonces se puede prescindir del subíndice p para considerar solo el termino $N \geq 0$.

2. Iteraciones

2.1. Iteraciones versión convencional

En esta sección se emplearán definiciones y notaciones usadas para el caso convencional de suma del operador suma sobre funciones aritméticas, no se profundizará en ellos, se pueden consultar las referencias para un estudio clásico y conciso, aquí se opta por desarrollar los conceptos expuestos presentado en mi Tesis de Licenciatura. Primero, recordemos algunas definiciones,

Definición 2.1 *Sea $f \in A(\mathbb{N})$ y $m \in \mathbb{N}$. La función iterada de grado m de f respecto al operador Suma, es la función aritmética h tal que*

$$h(n) = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{k_1} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} f(k_m).$$

y se denota como

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} f(k)$$

esto es,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} f(k) = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{k_1} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} f(k_m).$$

Observación 2.2 *Para cualquier función aritmética f, se define a la misma función f como su función iterada de grado 0 y esto se denota como*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{0} f(k) = f(n).$$

Análogamente se tiene que.

Definición 2.3 *Sea $f \in A(\mathbb{N})$ y $m \in \mathbb{N}$. La función iterada recíproca o dual de grado m respecto al operador Suma de la función f, es una función aritmética h tal que*

$$f(n) = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{k_1} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} h(k_m)$$

y se denota como

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-m} f(k).$$

Definición 2.4 *Sean $n \in \mathbb{N}, \ m \in \mathbb{Z}$. Entonces se define la siguiente función como*

$$\theta_m(n) = \sum_{k=1}^{n}{}_{m} \left[\frac{1}{k}\right]$$

Por lo tanto, de las definiciones anteriores se puede demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\theta_m(n) = \begin{cases} \dbinom{m+n-2}{n-1}, & m > 0, \\ \left[\frac{1}{n}\right], & m = 0, \\ (-1)^{n-1} \dbinom{-m}{n-1}, & m < 0. \end{cases}$$

Y con ellos se obtiene el seguiente resultado,

Teorema 2.5 *Para cualquier función aritmética f se tiene que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_m(n+1-k) f(k) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z}$$

La demostración es básica por inducción.

Por otra parte, recordemos que las generalizaciones de los factoriales complejos son las siguientes,

- $z^{\underline{n}} = z(z-1)...(z-n+1)$
- $z^{\overline{n}} = z(z+1)...(z+n-1)$

Y cumple la siguiente relación,

- $z^{\overline{n}} = (-1)^n (-z)^{\underline{n}}$

Por lo tanto, los factoriales pueden ser descritos en términos de la función Gamma,

- $z^{\overline{n}} = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)} \qquad \Re(z) > 0$
- $z^{\overline{-n}} = (-1)^n \frac{1}{(1-z)^{\overline{n}}}$

Así, usando las propiedades anteriores podemos extender la función $\theta_z(n)$.

Definición 2.6 *Para cualquier $z \in \mathbb{C}$ y $\forall n \in \mathbb{N}$ definimos la función $\theta_z(n)$ como;*

$$\theta_z(n) = \begin{cases} \dfrac{(z)^{\overline{n-1}}}{(n-1)!}, & \forall z \neq 0 \ , \\ \left[\frac{1}{n}\right], & z = 0. \end{cases}$$

Y por otra parte,

Definición 2.7 *Sea $f \in A(\mathbb{N})$ y $z \in \mathbb{C}$. Diremos que la función iterada de grado z de la función f, es una función aritmética g tal que*

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} \theta_z(n+1-k) f(k)$$

y la denotaremos como

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{z}\, f(k).$$

Definición 2.8 *Sean $f \in A(\mathbb{N})$ y $m \in \mathbb{N}$. Diremos que la función iterada de grado m de f respecto de la función aritmética g es una función aritmética h tal que*

$$h(n) = \sum_{k_1=1}^{n} g(n-k_1+1) \sum_{k_2=1}^{k_1} g(k_1-k_2+1) \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} g(k_{m-2}-k_{m-1}+1) \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} g(k_{m-1}-k_m+1) f(k_m)$$

y la denotaremos como

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[m,g(n)]}\, f(k).$$

Definición 2.9 *Sea $f \in A(\mathbb{N})$, entonces diremos que f es su función iterada de grado 0 respecto de g y denotaremos esto como*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[0,g(n)]}\, f(k) = f(n).$$

Definición 2.10 *Sean $f, g \in A(\mathbb{N})$ con $g(1) \neq 0$ y $m \in \mathbb{N}$. Diremos que la función iterada dual de grado m f respecto de la función g es una función aritmética h tal que*

$$f(n) = \sum_{k_1=1}^{n} g(n-k_1+1) \sum_{k_2=1}^{k_1} g(k_1-k_2+1) \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} g(k_{m-2}-k_{m-1}+1) \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} g(k_{m-1}-k_m+1) h(k_m)$$

y la denotaremos como

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[-m,g(n)]}\, f(k).$$

Observación 2.11 *Es claro que sin la restricción* $g(1)\neq 0$ *se tiene una definición absurda y la respuesta es simple, si g(1)=0 y* $f(1)\neq 0$, *entonces no es posible hallar una función h tal que f(1)=g(1) h(1). Con esto podemos ver que la existencia de*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[-m,g(n)]} f(k)$$

depende de la naturaleza de la función ***g*** *y es independiente de la función aritmética* ***f*** *sobre la cual se trabaja.*

Definición 2.12 *Sean* $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ *y* $g \in A_0(\mathbb{N})$. *Entonces definimos la siguiente función*

$$\theta_{[m,g(n)]}\ (n) = \sum_{k=1}^{n}{}_{[m,g(n)]} \left[\frac{1}{k}\right].$$

Teorema 2.13 *Sean* $g, f \in A(\mathbb{N})$ *talque* $g(1)\neq 0$ *, entonces tenemos que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[m,g(n)]} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_{[m,g(n)]}\ (k) f(n-k+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z}$$

La demostración se realiza por inducción, optaremos por omitirla.

Hasta este punto se ha presentado básicamente la mayoría de la teoría para el caso convencional. Sobre esto, conviene decir que era necesario para fundamentar sólidamente la suma sobre muti-índices, para finalizar recordemos el producto o convolución de Cauchy para funciones aritméticas.

Definición 2.14 *Para cualesquiera funciones* $f, g \in A(\mathbb{N})$ *se dice que el producto de Cauchy es una función aritmética h talque*

$$h(n) = \sum_{k=1}^{n} f(n+1-k) g(k) \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

y se denota como

$$h(n) = f(n) * g(n)$$

2.2. Iteraciones versión binomial

Este apartado es necesario para entender de forma clara las iteraciones para el caso de multi-índices de la versión multinomial y al ser de carácter elemental, no se detallarán los conceptos ya que por analogía con el caso convencional son inmediatos.

Definición 2.15 *Para cualesquiera funciones* $f, g \in A^*(\mathbb{N}^*)$ *se dice que el producto de Cauchy sobre el operador*

$$\sum_{r=0}^{N} \binom{N}{r},$$

es una función h talque,

$$h(N) = \sum_{r=0}^{N} \binom{N}{r} f(N-r) g(r),$$

y se denota como

$$h(N) = f(N) *^{\beta} g(N)$$

Ahora, veamos las siguientes definiciones

Definición 2.16 *Sea $f \in A^*(\mathbb{N}^*)$ y $m \in \mathbb{N}$. La función iterada de grado m respecto al operador $\sum_{r=0}^{N}\binom{N}{r}$, de la función f, es una función h tal que*

$$h(N) = \sum_{r_1=0}^{N}\binom{N}{r_1}\cdots\sum_{r_{m-1}=0}^{r_{m-2}}\binom{r_{m-2}}{r_{m-1}}\sum_{r_m=0}^{r_{m-1}}\binom{r_{m-1}}{r_m} f(r_m)$$

y se denota como

$$h(N) = \sum_{r=0}^{N}{}_{m}\binom{N}{r} f(r).$$

Observación 2.17 *Para cualquier función f, se define a la misma función f como su función iterada de grado 0 respecto al operador $\sum_{r=0}^{N}\binom{N}{r}$, y esto se denota como*

$$f(n) = \sum_{r=0}^{N}{}_{0}\binom{N}{r} f(r).$$

Análogamente se tiene que.

Definición 2.18 *Sea $f \in A(\mathbb{N})$ y $m \in \mathbb{N}$. La función iterada recíproca o dual de grado m respecto al operador $\sum_{r=0}^{N}\binom{N}{r}$, de la función f, es una función h tal que*

$$f(N) = \sum_{r_1=0}^{N}\binom{N}{r_1}\cdots\sum_{r_{m-1}=0}^{r_{m-2}}\binom{r_{m-2}}{r_{m-1}}\sum_{r_m=0}^{r_{m-1}}\binom{r_{m-1}}{r_m} h(r_m)$$

y se denota como

$$h(N) = \sum_{r=0}^{N}{}_{-m}\binom{N}{r} f(r).$$

Definición 2.19 *Sean $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$. Entonces se define la siguiente función como*

$$\psi_m(N) = \sum_{r=0}^{N}{}_{m}\binom{N}{r}\left[\frac{1}{r+1}\right]$$

Por lo tanto, de las definiciones anteriores se puede demostrar que,

$$\psi_m(N) = \begin{cases} m^N, & m \neq 0, \\ \left[\frac{1}{N+1}\right], & m = 0. \end{cases}$$

Y con ello, se obtiene el siguiente resultado,

Teorema 2.20 *Para cualquier función f se tiene que*

$$\sum_{r=0}^{N}{}_{m}\binom{N}{r} f(r) = \sum_{r=0}^{N}{}_{m}\binom{N}{r}\psi_m(r) f(N-r) \quad m \in \mathbb{Z}$$

La demostración es básica por inducción.

Por otra parte, se puede extender la definición a números complejos, de la siguiente forma.

Definición 2.21 *Para cualquier* $z \in \mathbb{C}$ *definimos la función* $\psi_z(N)$ *como;*

$$\psi_z(N) = \begin{cases} z^N, & z \neq 0, \\ \left[\frac{1}{N+1}\right], & z = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, se puede hacer una extensión compleja.

Definición 2.22 *Sea* $f \in A^*(\mathbb{N}^*)$ *y* $z \in \mathbb{C}$ *. Diremos que la función iterada de grado* z *de la función* f *respecto al operador* $\sum_{r=0}^{N} \binom{N}{r}$, *es una función* h *tal que*

$$h(n) = \sum_{r=0}^{N}{}_{z} \binom{N}{r} \psi_z(r) f(N-r)$$

y la denotaremos como

$$h(N) = \sum_{r=0}^{N}{}_{z} \binom{N}{r} f(r)$$

3. Iteraciones sobre multi-índices

De igual forma a lo anteriormente realizado, trataremos dos caso el convencional y su forma multinomial.

3.1. Caso convencional

Veamos lo siguiente.

Observación 3.1 *Sean* $f_1, \cdots, f_p$ *funciones aritméticas tales les que*

$$f(n) = \sum_{k_1=1}^{n} f_1(n-k_1+1) \sum_{k_2=1}^{k_1} f_2(k_1-k_2+1) \cdots \sum_{k_{p-1}=1}^{k_{p-2}} f_{p-1}(k_p-k_{p-1}+1) \sum_{k_p=1}^{k_{p-1}} f_p(k_p) \;\; \forall n, p \in \mathbb{N}.$$

Entonces se tiene que,

$$f(n) = \sum_{\substack{k_1+\cdots k_p = n+p-1 \\ 1 \leq k_{r_k} \leq n \\ r_i \neq r_j \;\; 1 \leq i,j,k \leq p}} f_1(k_{r_1}) \cdots f_p(k_{r_p}) \quad \forall n, p \in \mathbb{N}.$$

Esto es claro, ya que $f(n) = f_1(n) * \cdots * f_m(n)$ es un producto conmutativo y asociativo.

Observación 3.2 *Para cualquier* $p \in \mathbb{N}$ *y para toda* $f \in A(\mathbb{N})$ *se tiene que*

$$\sum_{\mu_p^r(n)} f(k_r) = \sum_{k=1}^{n}{}_{p-1} f(k) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces utilizando la ***Definición 2.8*** *esto es equivalente a*

$$\sum_{\mu_p^r(n)} f(k_r) = \sum_{k=1}^{n}{}_{[1,\theta_{p-1}(n)]} f(k) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ya tenemos lo necesario para definir las iteraciones para el caso de muti-índices.

Definición 3.3 *Sean $f \in A(\mathbb{N})$ y $p \in \mathbb{N}$. Diremos que la función iterada de grado m sobre el operador*

$$\sum_{\mu_p^r(n)} [\ ]$$

de f, es una función aritmética h tal que

$$h(n) = \sum_{\mu_p^{r_1}(n)} \sum_{\mu_p^{r_2}(k_{r_1})} \cdots \sum_{\mu_p^{r_{m-1}}(k_{m-2})} \sum_{\mu_p^{r_m}(k_{r_{m-1}})} f(k_{r_m}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y la denotaremos como

$$\sum_{\mu_p^r(n)}{}_m f(k_r).$$

De igual forma que en la **Definición 1.6**, mostraremos un ejemplo considerando composiciones de 4 elementos para una función aritmética f arbitraria evaluando los primeros dos valores naturales en las dos primeras iteraciones.

$$\begin{aligned}
h(1) &= \sum_{\mu_4^3(1)}{}_2 f(k_3) \\
&= \sum_{\mu_4^3(1)} \sum_{\mu_4^3(k_3^1)} f(k_3) \\
&= \sum_{k_1+k_2+k_3+k_4=1+4-1} \left(\sum_{\mu_4^3(k_3)} f(k_3) \right) \\
&= \sum_{\mu^3_{4\,(1,1,1,1)}(1)} f(k_3) = \sum_{\mu_4^3(1)} f(k_3) \\
&= \sum_{k_1+k_2+k_3+k_4=1+4-1} f(k_3) \\
&= f_{(1,1,1,1)}(1) = f(1),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
h(2) &= \sum\nolimits_{\mu_4^3(2)}^{2} f(k_3) \\
&= \sum_{\mu_4^3(2)} \sum_{\mu_4^3(k_3^1)} f(k_3) \\
&= \sum_{k_1+k_2+k_3+k_4=2+4-1} \left(\sum_{\mu_4^3(k_3)} f(k_3) \right) \\
&= \sum_{\mu^3_{4(1,1,1,2)}(1)} f(k_3) + \sum_{\mu^3_{4(1,1,2,1)}(2)} f(k_3) + \sum_{\mu^3_{4(1,2,1,1)}(1)} f(k_3) + \sum_{\mu^3_{4(2,1,1,1)}(1)} f(k_3) \\
&= 3 \left(\sum_{k_1+k_2+k_3+k_4=1+4-1} f(k_3) \right) + \sum_{k_1+k_2+k_3+k_4=2+4-1} f(k_3) \\
&= 3f_{(1,1,1,1)}(1) + \big(f_{(1,1,1,2)}(1) + f_{(1,1,2,1)}(2) + f_{(1,2,1,1)}(1) + f_{(2,1,1,1)}(1) \big) \\
&= 3f(1) + (3f(1) + f(2)) = 6f(1) + f(2)
\end{aligned}
$$

Con este ejemplo breve se puede ver de forma clara como se trabaja en la iteración sobre una función arbitraria para el caso de multi-índies.

Observación 3.4 *Sea $f \in A(\mathbb{N})$, entonces diremos que f es su función iterada de grado 0 sobre el operador*

$$\sum_{\mu_p^r(n)} [\ ]$$

y denotaremos esto como

$$f(n) = \sum\nolimits_{\mu_p^r(n)}^{0} f(k_r) \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definición 3.5 *Sean $f \in A(\mathbb{N})$ y $m, p \in \mathbb{N}$. Diremos que la función iterada dual de grado m sobre el operador*

$$\sum_{\mu_p^r(n)} [\ ]$$

de f, es una función aritmética h tal que

$$f(n) = \sum_{\mu_p^{r_1}(n)} \sum_{\mu_p^{r_2}(k_{r_1})} \cdots \sum_{\mu_p^{r_{m-1}}(k_{m-2})} \sum_{\mu_p^{r_m}(k_{r_{m-1}})} h(k_{r_m}) \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

y la denotaremos como

$$\sum\nolimits_{\mu_p^r(n)}^{-m} f(k_r).$$

Definición 3.6 *Sean $n, p \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$. Entonces definimos la siguiente función*

$$\bar{\Theta}_m(n) = \sum\nolimits_{\mu_p^r(n)}^{m-1} (1_{(k_r)} = 1)$$

Definición 3.7 *Para cualesquiera funciones $f, g \in A(\mathbb{N})$ y $p \in \mathbb{N}$ se define el producto $*_{\mu_p}$ como*

$$f *_{\mu_p} g(n) = \sum_{k_1+\cdots+k_p=n+p-1} f(k_i)g(k_j) \;\; i \neq j \;\;\; 1 \leq i, j \leq p \;\;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces resulta inmediato lo siguiente

Observación 3.8 *Sean $f_1, ..., f_v$, $g_1, ..., g_w$, f y g en $A(\mathbb{N})$ tales que*

$$\sum_{\mu_p^{r_1,\ldots,r_v}(n)} f_1(k_{r_1}) \cdots f_v(k_{r_v}) = f(n)$$

y

$$\sum_{\mu_p^{r_1,\ldots,r_w}(n)} g_1(k_{r_1}) \cdots g_w(k_{r_w}) = g(n) \qquad \forall n, p \in \mathbb{N} \;\; 1 < p \;\; , \; 1 \leq v < p \; , \; 1 \leq w \leq p-v$$

entonces

$$\sum_{\mu_p^{r_1,\ldots,r_v,s}(n)} f_1(k_{r_1}) \cdots f_v(k_{r_v})g(k_s) = \sum_{\mu_p^{r_1,\ldots,r_w,s}(n)} g_1(k_{r_1}) \cdots g_w(k_{r_w})f(k_s) \qquad \forall n, p \in \mathbb{N}$$

Teorema 3.9 *(Versión para multi-índices) Para cualquier función aritmética f se tiene que,*

$$\sum_{\mu_p^r(n)}{}_m f(k_r) = \sum_{k_1+\ldots+k_p=n+p-1} \bar{\Theta}_m(k_s)f(k_r) \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z}$$

3.2. Caso Mutinomial

Veamos lo siguiente.

Observación 3.10 *Sean $f_1, \cdots, f_p$ funciones tales que*

$$f(N) = \sum_{r_1=0}^{N} \binom{N}{r_1} f_1(r_1) \sum_{r_2=0}^{r_1} \binom{r_1}{r_2} f_2(r_2) \cdots \sum_{r_{m-1}=0}^{r_{m-2}} \binom{r_{m-2}}{r_{m-1}} f_{m-1}(r_{m-1}) \sum_{r_m=0}^{r_{m1}} \binom{r_{m-1}}{r_m} f_m(r_m).$$

Entonces se tiene que,

$$f(N) = \sum_{r_1+\cdots+r_x+\cdots+r_p=N} \binom{N}{r_1 \cdots r_x \cdots r_p} f_1(r_1) \cdots f_x(r_x) \cdots f_p(r_p)$$

Esto es claro, ya que $f(N) = f_1(N) *^{\beta} \cdots *^{\beta} f_m(N)$ es un producto conmutativo y asociativo.

Definición 3.11 *Sea $f \in A^*(\mathbb{N}^*)$ y $m, p \in \mathbb{N}$. La función iterada de grado m de f respecto al operador*

$$\sum_{r_1+\cdots+r_p=N} \binom{N}{r_1 \cdots r_p},$$

es la función h tal que,

$$h(N) = \sum_{\beta_p^{x_1}(N)} \sum_{\beta_p^{x_2}(r_{x_1})} \cdots \sum_{\beta_p^{x_{p-1}}(r_{x_{p-a}})} \sum_{\beta_p^{x_p}(r_{x_{p-1}})} f(r_{x_p})$$

y se denota como

$$h(N) = \sum\nolimits_{\beta_p^{x}(N)}^{m} f(r_x).$$

Observación 3.12 *Sean $f \in A^*(\mathbb{N}^*)$, $p \in \mathbb{N}$. Entonces diremos que f es su función iterada de grado 0 sobre el operador*

$$\sum_{r_1+\cdots+r_p=N} \binom{N}{r_1 \cdots r_p},$$

y denotaremos esto como

$$f(N) = \sum\nolimits_{\beta_p^{x}(N)}^{0} f(r_x).$$

Definición 3.13 *Sean $f \in A^*(\mathbb{N}^*)$ y $p, m \in \mathbb{N}$. Diremos que la función iterada dual de grado m sobre el operador*

$$\sum_{r_1+\cdots+r_p=N} \binom{N}{r_1 \cdots r_p},$$

es la función h tal que,

$$f(N) = \sum_{\beta_p^{x_1}(N)} \sum_{\beta_p^{x_2}(r_{x_1})} \cdots \sum_{\beta_p^{x_{p-1}}(r_{x_{p-a}})} \sum_{\beta_p^{x_p}(r_{x_{p-1}})} h(r_{x_p})$$

y se denota como

$$h(N) = \sum\nolimits_{\beta_p^{x}(N)}^{-m} f(r_x).$$

Definición 3.14 *Sean $p \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$. Entonces definimos la siguiente función*

$$\bar{\Psi}_m(N) = \sum\nolimits_{\beta_p^{x}(N)}^{m-1} (1_{(r_x)} = 1).$$

Definición 3.15 *Para cualesquiera funciones $f, g \in A^*(\mathbb{N}^*)$ y $p \in \mathbb{N}$ se define el producto de Cauchy $*_{\beta_p}$ sobre el operador*

$$\sum_{r_1+\cdots+r_p=N} \binom{N}{r_1 \cdots r_p},$$

como la función h talque

$$h(N) = \sum_{r_1+\cdots+r_p=N} \binom{N}{r_1 \cdots r_p} f(r_i)g(r_j),$$

donde $i \neq j$ y se denota como, $h(N) = f(N) *_{\beta_p} g(N)$.

Entonces resulta inmediato lo siguiente

Observación 3.16 *Sean $f_1, ..., f_v$, $g_1, ..., g_w$, f y g en $A^*(\mathbb{N}^*)$ tales que*

$$\sum_{\beta_p^{x_1,\ldots,x_v}(N)} \binom{N}{r_1 \cdots r_p} f_1(r_{x_1}) \cdots f_v(r_{x_v}) = f(N)$$

y

$$\sum_{\beta_p^{x_1,\ldots,x_w}(N)} \binom{N}{r_1 \cdots r_p} g_1(r_{x_1}) \cdots g_w(r_{x_w}) = g(N) \qquad \forall, p \in \mathbb{N} \;\; 1 < p \;\; , \; 1 \leq v < p \; , \; 1 \leq w \leq p{-}v$$

entonces

$$\sum_{\beta_p^{r_1,\ldots,r_v,s}(N)} \binom{N}{r_1 \cdots r_p} f_1(r_{x_1}) \cdots f_v(r_{x_v}) g(r_s) = \sum_{\beta_p^{r_1,\ldots,r_w,s}(N)} \binom{N}{r_1 \cdots r_p} g_1(r_{x_1}) \cdots g_w(r_{x_w}) f(r_s) \qquad \forall p \in \mathbb{N}$$

Teorema 3.17 *(Versión Multinomial) Para cualquier función f se tiene que*

$$\sum_{\beta_m^x(N)}{}_m f(r_x) = \sum_{r_1+\ldots+r_p=N} \binom{N}{r_1 \cdots r_p} \bar{\Psi}_m(r_i) f(r_j) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z}$$

4. Problemas

En esta sección se exponen algunos problemas concernientes a la suma sobre multi-índices, los de tipo teórico se presentaron en mi Tesis de Licenciatura, con la intención de hacer notar que con las mínimas definiciones y con la notación adecuada las características propias para el caso de multi-índices son de carácter inmediato, aquí hemos optado por también agregar algunos problemas de tipo numérico para afianzar los conceptos presentados.

Problema 4.1 *Utilizar la* ***Definición 2.8*** *y la* ***Definición 2.12*** *para demostrar lo siguiente;*

i) Probar que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[m,\theta_z(n)]}\left[\frac{1}{k}\right]=\theta_{mz}(n)\quad \forall n\in\mathbb{N}\ ,\ \ \forall m\in\mathbb{Z}\ \ y\ \ \forall z\in\mathbb{C}$$

ii) Sean $f\in A(\mathbb{N})$ y $\forall z\in\mathbb{C}$. Demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[m,\theta_z(n)]}f(k)=\sum_{k=1}^{n}\theta_{mz}(k)f(n+1-k)\qquad \forall n\in\mathbb{N},\forall m\in\mathbb{Z}$$

Solución.

i) Para $m=0$ es claro, entonces solo debemos verificar los siguientes casos

(a)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}{}_{[m,\theta_z(n)]}\left[\frac{1}{k}\right] &= \sum_{k_m=1}^{n}\theta_z(n+1-k_m)\cdots\sum_{k_1=1}^{k_2}\theta_z(k_2+1-k_1)\left[\frac{1}{k_1}\right]\\ &= \theta_z(n)*\cdots*\theta_z(n)=\theta_{mz}(n) \qquad \forall n,m\in\mathbb{N},\forall z\in\mathbb{C}\end{aligned}$$

(b) Para $m<0$ se sigue de la ***Definición 2.10*** *y del inciso anterior.*

ii) Es inmediata de la ***Definición 2.7*** *y del* ***Teorema 2.13****, usando el inciso anterior.*

■

Problema 4.2 *Sean $f \in A(\mathbb{N})$ y $z \in \mathbb{C}$, entonces veamos lo siguiente*

Definición 3a. *Para cualquier $w \in \mathbb{C}$ diremos que la función $\theta_{[w,\theta_z(n)]}(n)$ está dada como*

$\theta_{[w,\theta_z(n)]}(n) = \theta_{wz}(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Definición 3b. *Diremos que la función iterada de grado w de f respecto de $\theta_z(n)$, es una función aritmética g tal que*

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} \theta_{[w,\theta_z(n)]}(n+1-k) f(k)\, \forall n \in \mathbb{N}$$

y la denotaremos como

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[w,\theta_z(n)]} f(k).$$

Esto es

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} \theta_{[w,\theta_z(n)]}(n+1-k) f(k)$$

Utilizar lo anterior para demostrar que para cualquiera f, g, h y p funciones aritméticas tales que $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall w \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[w,\theta_z(n)]} f(k) = g(n)$$

y

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[w,\theta_z(n)]} h(k) = p(n)$$

se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} f(n+1-k)p(k) = \sum_{k=1}^{n} h(n+1-k)g(k) \quad \forall \in \mathbb{N} \quad y \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Solución. *Se sigue del **Problema 4.1** y de las propiedades de la convolución de Cauchy.*

■

Problema 4.3 *Utilizar el **Problema 4.1** , la **Observación 3.2** y la **Definición 3.14** para probar que*

$$\bar{\Theta}_m(n) = \theta_{(m-1)(p-1)+1}(n) \quad \forall p, n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall m \in \mathbb{Z}$$

esto es

$$\sum_{\mu_p^r(n)}{}_{m-1} (1_{(k_r)} = 1) = \theta_{(m-1)(p-1)+1}(n) \qquad .$$

Solución. *Primero, sabemos que*

$$\sum_{\mu_p^r(n)} \bar{\Theta}_0(k_r) = 1,$$

entonces utilizando la ***Observación 3.2****, esto es equivalente a*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[1,\theta_{p-1}(n)]} \bar{\Theta}_0(k) = 1$$

Por lo tanto $\bar{\Theta}_0(n) = \theta_{2-p}(n)$.

Por otra parte, aplicando lo visto en el ***Problema 4.1*** *y la* ***Definición 3.14*** *se tiene que*

$$\begin{aligned}
\bar{\Theta}_m(n) &= \sum_{\mu_p^r(n)}{}_m \bar{\Theta}_0(k_r) \\
&= \sum_{k=1}^{n}{}_{[m,\theta_{p-1}(n)]} \bar{\Theta}_0(k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \theta_{m(p-1)}(k)\bar{\Theta}_0(n+1-k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \theta_{m(p-1)}(k)\theta_{2-p}(n+1-k) \\
&= \theta_{(m-1)(p-1)+1}(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

■

Problema 4.4 *Para cualquier* $f \in A(\mathbb{N})$ *y* $p \in \mathbb{N}$ *definimos lo siguiente:*

Definición 3c. *Para toda* $z \in \mathbb{C}$ *diremos que la función* $\bar{\Theta}_z(n)$ *está dada como*

$$\bar{\Theta}_z(n) = \theta_{(z-1)(p-1)+1}(n) \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definición 3d. *Diremos que la función iterada de grado z sobre el operador*

$$\sum_{\mu_p^r(n)} [\ ]$$

de la función f , está dada por

$$\sum_{\mu_p^r(n)}{}_z f(k_r) = \sum_{k_1+\ldots+k_p=n+p-1} \bar{\Theta}_z(k_s)f(k_r) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Utilizando lo anterior, probar lo siguiente:

i)

$$\sum_{k_1+\ldots+k_p=n+p-1} \bar{\Theta}_{x_1}(k_1)\cdots\bar{\Theta}_{x_p}(k_p) = \bar{\Theta}_{x_1+\cdots+x_p+1-p}(n) \qquad \forall n\in\mathbb{N}\ ,\ \forall x_1,...,x_p\in\mathbb{C}$$

ii)

$$\sum_{k_1+\ldots+k_p=n+p-1} \theta_{x_1}(k_1)\cdots\theta_{x_p}(k_p) = \theta_{x_1+\cdots+x_p}(n) \qquad \forall n\in\mathbb{N}\ ,\ \forall x_1,...,x_p\in\mathbb{C}$$

iii)

$$\sum_{k_1+\ldots+k_p=n+p-1} \theta_{x_1}(k_1)\cdots\theta_{x_{p-1}}(k_{p-1})f(k_p) = f(n) \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

sí, y solo sí,

$x_1+\cdots+x_{p-1}=0$ *y* $x_1,...,x_{p-1}\in\mathbb{C}$.

iv)

$$\sum_{k_1+\ldots+k_p=n+p-1} \bar{\Theta}_{x_1}(k_1)\cdots\bar{\Theta}_{x_{p-1}}(k_{p-1})f(k_p) = f(n) \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

sí, y solo sí,

$x_1+\cdots+x_{p-1}=p-2$ *sí* $p\neq 1$, *ó* $x_1=0$ *sí* $p=1$.

Solución.

i) Sabemos que

$$\begin{aligned}\sum_{k_1+\ldots+k_p=n+p-1} \bar{\Theta}_{x_1}(k_1)\cdots\bar{\Theta}_{x_p}(k_p) &= \bar{\Theta}_{x_1}(n)*\cdots*\bar{\Theta}_{x_p}(n)\\ &= \theta_{(x_1-1)(p-1)+1}(n)*\cdots*\theta_{(x_1-1)(p-1)+1}(n)\\ &= \bar{\Theta}_{x_1+\cdots+x_p+1-p}(n) \qquad \forall n\in\mathbb{N},\forall x_1,....,x_p\in\mathbb{C}\end{aligned}$$

ii) Análogamente al inciso anterior

$$\begin{aligned}\sum_{k_1+\ldots+k_p=n+p-1} \theta_{x_1}(k_1)\cdots\theta_{x_p}(k_p) &= \theta_{x_1}*\cdots*\theta_{x_p}(n)\\ &= \theta_{x_1+\cdots+x_p}(n) \qquad \forall n\in\mathbb{N}\ ,\ \forall x_1,...,x_p\in\mathbb{C}\end{aligned}$$

iii) Primero veamos lo siguiente

$$\begin{aligned}\sum_{k_1+\ldots+k_p=n+p-1} \theta_{x_1}(k_1)\cdots\theta_{x_{p-1}}(k_{p-1})f(k_p) &= \theta_{x_1}(n)*\cdots*\theta_{x_{p-1}}(n)*f(n)\\ &= \theta_{x_1+\cdots+x_p}(n)*f(n) \qquad \forall n\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

y como $\theta_w(n)*f(n)=f(n) \ \Leftrightarrow\ w=0$, *entonces se tiene lo pedido.*

iv) Análogamente,

$$\begin{aligned}\sum_{k_1+\ldots+k_p=n+p-1} \bar{\Theta}_{x_1}(k_1)\cdots\bar{\Theta}_{x_{p-1}}(k_{p-1})f(k_p) &= \bar{\Theta}_{x_1}(n)*\cdots*\Theta_{x_{p-1}}(n)*f(n)\\ &= \theta_{(x_1+\cdots+x_p+2-p)(p-1)}(n)*f(n) \qquad \forall n\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

y como $\theta_w(n)*f(n)=f(n) \ \Leftrightarrow\ w=0$, *entonces se tiene lo pedido.*

■

Problema 4.5 *Para cualquier* $f \in A^*(\mathbb{N}^*)$ *y* $p \in \mathbb{N}$ *definimos lo siguiente:*

Definición 4c. *Para toda* $z \in \mathbb{C}$ *diremos que la función* $\Psi_z(N)$ *está dada como,*

$$\Psi_z(N) = \psi_{(z-1)(p-1)+1}(N) = ((z-1)(p-1)+1)^N .$$

Definición 4d. *Diremos que la función iterada de grado z sobre el operador*

$$\sum_{\beta_p^x(N)} [\ ]$$

de la función f *, está dada por*

$$\sum_{\beta_p^x(N)}{}_z f(r_x) = \sum_{r_1+\cdots+r_p=N} \binom{N}{r_1 \cdots r_p} \Psi_z(r_i) f(r_j) \qquad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Utilizando lo anterior, probar lo siguiente:

i)

$$\sum_{r_1+\ldots+r_p=N} \binom{N}{r_1 \cdots r_p} \Psi_{x_1}(r_1) \cdots \Psi_{x_p}(r_p) = \Psi_{x_1+\cdots+x_p+1-p}(N) \quad \forall p \in \mathbb{N} \, , \, \forall x_1, ..., x_p \in \mathbb{C}$$

ii)

$$\sum_{r_1+\ldots+r_p=N} \binom{N}{r_1 \cdots r_p} \psi_{x_1}(r_1) \cdots \psi_{x_p}(r_p) = \psi_{x_1+\cdots+x_p}(N) \quad \forall p \in \mathbb{N} \, , \, \forall x_1, ..., x_p \in \mathbb{C}$$

iii)

$$\sum_{r_1+\ldots+r_p=N} \binom{N}{r_1 \cdots r_p} \psi_{x_1}(r_1) \cdots \psi_{x_{p-1}}(r_{p-1}) f(r_p) = f(N) \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

sí, y solo sí,

$x_1 + \cdots + x_{p-1} = 0$ *y* $x_1, ..., x_{p-1} \in \mathbb{C}$.

iv)

$$\sum_{r_1+\ldots+r_p=N} \binom{N}{r_1 \cdots r_p} \Psi_{x_1}(r_1) \cdots \Psi_{x_{p-1}}(r_{p-1}) f(r_p) = f(N) \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

sí, y solo sí,

$x_1 + \cdots + x_{p-1} = p - 2$ *sí* $p \neq 1$, *ó* $x_1 = 0$ *sí* $p = 1$.

Solución. *Análogamente al problema anterior.* ■

Problema 4.6 *Sean* $n, p \in \mathbb{N}$ *y* $x \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ *Demostrar que*

$$\sum_{k_1+\cdots+k_{p+1}=n+p} x^{k_r} \;+\; \sum_{s_1+\cdots+s_{n+1}=n+p} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{s_r} = x^n \left(\frac{x}{x-1}\right)^p$$

Solución. *Sabemos que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} x^k + \sum_{r=1}^{m}{}_{n} \left(\frac{x}{x-1}\right)^r = x^n \left(\frac{x}{x-1}\right)^m \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}\ y\ \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}.$$

*entonces por la **Observación 3.2** se tiene que*

$$\sum_{k_1+\cdots+k_{p+1}=n+p} x^{k_r} \;+\; \sum_{s_1+\cdots+s_{n+1}=n+p} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{s_r} = x^n \left(\frac{x}{x-1}\right)^p.$$

$\blacksquare$

Referencias

[1] Aigner, Martin. *A course in enumeration.* Springer Science & Business Media, 2007.

[2] Apostol, Tom M. *Introducción a la teoría analítica de números.* Reverté, 1984.

[3] Balanzario, Eugenio P. *Breviario de teoría analítica de los números.* Sociedad Matemática Mexicana, 2008.

[4] Bogart, Kenneth P. *Introductory combinatorics.* Saunders College Publishing, 1989.

[5] Comtet, Louis. *Analyse combinatoire: Vol. 1.* Presses Universitaires de France, 1970.

[6] Friedlander, John B. and Heath-Brown, DR and Iwaniec, H. and Kaczorowski, J. *Analytic number theory.* Springer, 1891.

[7] Gupta, Hansraj. *Selected topics in number theory.* Abacus Press, 1980.

[8] Ivic, Aleksandar. *The Riemann zeta-function: theory and applications.* Courier Corporation, 2012.

[9] Ríbnikov, Konstantin. *Análisis combinatorio.* Mir, 1988.

[10] Ríbnikov, Konstantin. *Análisis combinatorio: problemas y ejercicios.* Mir, 1989.

[11] Rosen, Kenneth H. *Handbook of discrete and combinatorial mathematics.* CRC Press, 2000.

[12] Rota, Gian-Carlo and Doubilet, P. *Finite operator calculus.* Academic Press, 1975.