Nota sobre la distribución binomial negativa y la distribución beta

Mat. Enrique Torres Miguel
kike_torres@ciencias.unam.mx

16 de septiembre de 2022

Resumen

El objetivo es mostrar una identidad obtenida por iteraciones en la suma geométrica la cual es una relación entre los dos posibles resultados, "éxitos" y "fracasos" en la distribución binomial negativa, nombrando a esta propiedad como **relación de complemetariedad**.

Antecedente

Este es un escrito generado a partir de una entrada publicada en la página www.mathsingular.com.mx solamente se hacen mínimas modificaciones para seguir la linea de la publicación original, facilitar la lectura al mayor número de lectores.

1. Introducción

Empezaremos recordemos una de las generalizaciones dadas para la suma geométrica, una revisión detallada de cómo se deduce esta identidad se puede encontrar en el PDF, Linealidad de la iteración del operador y sus aplicaciones en la suma geométrica, se sugiere solamente como contexto ya que no es relevante para la aplicación que mostraremos a continuación.

Ejemplo 1.1 *Sean $n, m \in \mathbb{N}\, x \neq 0, 1$. Entonces se tiene lo siguiente,*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{m+k-2}{k-1} x^{k-1}(1-x)^m + \sum_{r=1}^{m} \binom{n+r-2}{r-1} (1-x)^{r-1} x^n = 1$$

Para los lectores que están familiarizados con términos de probabilidad es sencillo entender la aplicación que la identidad anterior tiene en los conceptos de distribución binomial negativa. Sin embargo, lo que se busca es hacer asequibles para todos, los conceptos que se van presentando, entonces revisaremos de forma superficial algunos conceptos de probabilidad, con la finalidad de facilitar el entendimiento de lo que se pretende mostrar, cabe mencionar se estará utilizando en el ejemplo principal el número de visitantes del sitio https://mathsingular.com.mx/ (1863) hasta el momento de que se publicó la entrada original.

Experimentos tipo Bernoulli

Recordemos que un experimento tipo Bernoulli, es un experimento aleatorio, es decir, que no podemos determinar su resultado y que tiene exactamente dos posibles resultados, normalmente identificados como "éxito" ó "fracaso", comúnmente se denota la probabilidad de que suceda un "éxito" con la letra p y a la probabilidad de que suceda un "fracaso" se le denota con la letra q.

Por lo tanto, es inmediato ver que se cumple que $p + q = 1$, pues por definición el experimento solamente tiene dos posibles resultados. El ejemplo más emblemático es el lanzamiento de una moneda, en este se puede considerar como un "éxito", el obtener uno de los dos lados de la moneda, por decir algo, obtener una cara, y al "fracaso", obtener una cruz, siendo irrelevante cuál se designe como "éxito" ó "fracaso".

Por otra parte, la probabilidad de que alguno de los dos resultados suceda es un número que mide el resultado posible, ejemplo se puede considerar en el lanzamiento de la moneda a la probabilidad de que suceda un "éxito" con $p = \frac{1}{2}$ teniendo en cuenta que las condiciones del experimento sean las mismas para los dos posibles resultados y coincide con la probabilidad que se obtenga un "fracaso" definiendo así el valor de $q = \frac{1}{2}$.

Es claro que, sí de alguna forma se beneficia a alguno de los resultados su número de probabilidad asignado aumenta, por ejemplo sí consideramos que tirar la moneda con la cara boca arriba propicia que el resultado sea cara, entonces el valor de p podrían considerarse mayor a $\frac{1}{2}$. En efecto, suponiendo que se cuente con una moneda con dos caras, siempre se obtendría un "éxito", por lo tanto $p = 1$ y $q = 0$.

2. Algunas distribuciones discretas

Ahora, retomaremos algunas nociones básicas de distribuciones para poder revisar como se relaciona la identidad del **Ejemplo 1.1** con la distribución binomial negativa. En lo siguiente se entenderá que se trabaja sobre una secuencia de experimentos Bernoulli que suceden con las mismas condiciones, es decir, que la probabilidad asignada a cada uno de sus posibles resultados es la misma para cada experimento y que la secuencia de experimentos son independientes, es decir que los resultados de un experimento dado no están determinados por algún otro experimento.

Observación 2.1 *Sean* $p \in (0,1)$, $n, m \in \mathbb{N}$ *y* $k, r \geq 0$ *y por otra parte definamos lo siguiente,*

i) $x \approx$ *"experimento" - Una visita a este sitio web*

ii) $X \approx (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ *- Visitas de este sitio web*

iii) $r \approx$ *"éxito " - Cuándo un visitante lea una entrada del blog*

iv) $k \approx$ "$fracaso$" *- Cuándo un visitante no lea una entrada del blog*

Una vez definido lo anterior

Distribución uniforme discreta

Dada una variable aleatoria $X \sim (x_1, x_2, ..., x_n)$, esta distribución asigna la misma probabilidad a cada resultado de un experimento y su función de probabilidad está dada por,

$$P[X = x_i] = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & x_i \in \{x_1, ..., x_n\}, \\ \\ 0 & \textit{en otro caso}. \end{cases}$$

Ejemplo 2.2 *La probabilidad de que un visitante lea esta entrada del blog es,*

$$p = \frac{1}{1863} \approx 0{,}000536$$

Distribución binomial

Dada una secuencia de experimentos Bernoulli independientes, la distribución binomial $X \sim \mathbb{B}(n, p)$, describe el número de r "éxitos" obtenidos en n experimentos dados, con una probabilidad constante p de "éxito" y su función de probabilidad está dada por,

$$P[X = r] = \begin{cases} \dbinom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} & 0 \leq r \leq n, \\ \\ 0 & \textit{en otro caso}. \end{cases}$$

Ejemplo 2.3 *la probabilidad de que 4 visitantes lean una entrada del blog es,*

$$P[X = 4] = \binom{1863}{4} \left(\frac{1}{1863}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{1863}\right)^{1863-4} \approx 0{,}015307$$

Distribución geométrica

Dada una secuencia de experimentos Bernoulli independientes con una probabilidad constante p de "éxito", la distribución geométrica $X \sim \mathbb{G}(p)$, describe el número experimentos necesarios para obtener un primer "éxito", equivalentemente describe el número de k "fracasos" antes de obtener el primer "éxito", y su función de probabilidad está dada por,

$$P[X = x] = \begin{cases} p(1-p)^x & 1 \leq x \quad (0 \leq x - 1 = k \ \ \textit{para fracasos}) \\ \\ 0 & \textit{en otro caso} . \end{cases}$$

Ejemplo 2.4 *La probabilidad de que el quinto visitante haya sido el primero en leer una entrada del blog es,*

$$P[X = 5] = \left(\frac{1}{1863}\right)\left(1 - \frac{1}{1863}\right)^5 \approx 0{,}000535$$

Distribución binomial negativa

Dada una secuencia de experimentos Bernoulli independientes con una probabilidad constante p de "éxito", la distribución binomial negativa $X \sim \mathbb{BN}(r,p)$, describe el número x de experimentos necesarios para obtener r "éxitos", equivalentemente, describe el número k de "fracasos" antes de obtener r "éxitos", y su función de probabilidad para X experimentos está dada por,

$$P[X = x] = \begin{cases} \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} & 1 \leq r \leq x \\ \\ 0 & \textit{en otro caso} . \end{cases}$$

Para "fracasos",

$$P[X = k] = \begin{cases} \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^{k} & 0 \leq k \\ \\ 0 & \textit{en otro caso} . \end{cases}$$

Ejemplo 2.5 *La probabilidad de que en la visita* 211 *se hayan acumulado* 4 *lectores de este blog es,*

$$P[X = 211] = \binom{211-1}{4-1}\left(\frac{1}{1863}\right)^4\left(1 - \frac{1}{1863}\right)^{211-4} \approx 0{,}00000011$$

3. Relación de complementariedad

Análisis sobre "éxitos" y "fracasos" en la distribución binomial negativa

Ahora que ya conocemos los términos adecuados sobre la distribución binomial negativa, planteamos la aplicación en la teoría de probabilidades de la identidad mostrada en el **Ejemplo 1.1**.

Observación 3.1 *Sean $m, N \in \mathbb{N}$, Entonces veamos lo siguiente.*

a) Supongamos que N se particiona en m elementos naturales, es decir $N = k_1 + \cdots + k_m$. Entonces son equivalentes,

i) N tiene una representación canónica, $N = n_m + m - 1$ donde, n_m es el máximo de los sumandos

ii) $\hat{k_1} + \cdots + \hat{k_m} = n_m + m - 1$, para cualquier partición de m sumandos

b) $\forall N \in \mathbb{N}$ tal que $N = k_1 + \cdots + k_m$ es una partición natural, son equivalentes,

iii) $n_m = 1$ (máximo de los sumandos)

iv) $N = k_1 + \cdots + k_N$

Por lo tanto, teniendo en cuenta lo anterior, sí X representa el número de experimentos, entonces para cualquier partición $X = k_1 + r_1$ se tiene que $k_1 + r_1 = (X-1) + 2 - 1 = X$, es conveniente comentar que en cualquier número X de experimentos, siempre se pueden usar los "éxitos" y "fracasos" como una partición, teniendo en cuenta que $k_1 = X \Leftrightarrow r_1 = 0$ ó $r_1 = X \Leftrightarrow k_1 = 0$, es decir, que solamente se hayan obtenido "éxitos" ó "fracasos" durante los X experimentos. Entonces usando este hecho en los valores no nulos de la función de probabilidad de la distribución binomial negativa se tiene que,

$$\binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} = \binom{r+k-2}{r-1} p^r (1-p)^{k-1} = \binom{r+k-2}{k-1} p^r (1-p)^{k-1}$$

Solamente se uso el cambio de variable $X = r + k - 1$ para tomar valores naturales en k y hay que tener en cuenta que $1 \leq r$. Por lo tanto, la función de probabilidad para este caso se puede escribir como,

$$P[1 \leq r, X = k] = \begin{cases} \binom{k+r-2}{k-1} p^r (1-p)^{k-1} & 1 \leq k \\ \\ 0 & \textit{en otro caso} \,. \end{cases}$$

Análogamente, como sabemos que al modelar "éxitos" ó "fracasos" son complementarios en X experimentos, entonces podemos aplicar el mismo cambio de variable en la siguiente fórmula,

$$\binom{x-1}{k-1} (1-p)^k p^{x-k} = \binom{k+r-2}{k-1} (1-p)^k p^{r-1} = \binom{k+r-2}{r-1} (1-p)^k p^{r-1}$$

y la correspondiente función de probabilidad para el caso complementario será

$$P[1 \leq k, X = r] = \begin{cases} \binom{k+r-2}{r-1}(1-p)^k p^{r-1} & 1 \leq r \\ \\ 0 & \textit{en otro caso} . \end{cases}$$

Y aquí es cuando la magia sucede, usando la identidad del **Ejemplo 1.1** y tomando las probabilidades durante los recorridos de los valores k, r en el número X de experimentos se tiene que,

$$\sum_{t=1}^{k} \binom{r+t-2}{t-1} (1-p)^r p^{t-1} + \sum_{s=1}^{r} \binom{k+s-2}{s-1} p^k (1-p)^{s-1} = 1.$$

Es sencillo verificar las implicaciones que tiene esta identidad en la teoría probabilidad, veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.2 *Supongamos nos interesa modelar hasta que visita X se podrían haber tenido 4 lectores, es decir, nos interesa saber la probabilidad que en la visita X, haya habido cuatro personas que leyeron alguna entrada del blog, para revisar esto recordemos que los "éxitos" y los "fracasos" son complementarios, entonces $X = 4 + k$ y teniendo en cuenta el número X de experimentos y el número $r = 4$ de "éxitos" la función que modela la probabilidad es la siguiente,*

$$\begin{aligned} g(k) &= P[4, X = k] \\ &= \binom{k+4-2}{4-1}\left(\frac{1}{1863}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{1063}\right)^{k-1} \\ &= \binom{k+2}{k-1}\left(\frac{1}{1863}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{1863}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

La cuestión se pone interesante, sí quisiéramos saber la probabilidad que a lo más en la visita 1500 haya habido 4 lectores, el número de probabilidades a sumar es algo considerable pues la solución es,

$$\begin{aligned} P[4, X \leq 1500] &= \sum_{i=4}^{1500} g(k) \\ &= \sum_{k=1}^{1497} \binom{k+2}{k-1}\left(\frac{1}{1863}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{1863}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

Pero conociendo la relación de complementariedad de los "éxitos" y de los "fracasos" entonces sabemos que,

$$P[4, X \leq 1500] = 1 - \sum_{r=1}^{4} \binom{1495+r}{r-1} \left(1 - \frac{1}{1863}\right)^{1497} \left(\frac{1}{1863}\right)^{r-1}$$

Por lo tanto, $P[4, X \leq 1500] \approx 0{,}009255$

Como se puede apreciar, no es necesario ser un experto en el tema de las probabilidades para poder visualizar las aplicaciones de las identidades que surge usando la propiedad iterativa del operador Suma, es suficiente con dejar volar la imaginación pues la grandeza de las matemáticas hace que de alguna u otra forma los resultados de las disciplinas matemáticas converjan. Para finalizar esta entrada mostraremos la propiedad inmediata que surge en la relación de complementariedad y la distribución beta.

Relación de complementariedad para la distribución beta y otras identidades aplicadas a la probabilidad.

Como ya estamos habituados con términos de probabilidad esta sección se hará lo más breve posible, sólo recordaremos algunos conceptos y utilizaremos la identidad del **Ejemplo 1.1**. Comenzaremos recordando la definición usual de la función beta.

Definición 3.3 *$\forall z, w$ tales que, $\Re(z), \Re(w) \in \mathbb{R}^+$. Se define $\beta(z,w)$ como,*

$$\beta(z,w) = \int_0^1 x^{z-1}(1-x)^{w-1}dx = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

Por otra parte, retomando la identidad finita del **Ejemplo 1.1** sabemos que, sí $n, m \in \mathbb{N}\, x \neq 0, 1$, entonces conocemos la expresión,

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{m+k-2}{k-1} x^{k-1}(1-x)^m + \sum_{r=1}^{m} \binom{n+r-2}{r-1} (1-x)^{r-1} x^n = 1.$$

Y manipulando la identidad anterior usando el cambio de variable

$$x = \frac{y-a}{b-a},$$

se tiene que,

$$1 - x = 1 - \frac{y-a}{b-a} = \frac{b-a}{b-a} - \frac{y-a}{b-a} = \frac{b-y}{b-a}.$$

Entonces, sustituyendo valores en la identidad anterior se sigue que,

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{m+k-2}{k-1} \left(\frac{y-a}{b-a}\right)^{k-1} \left(\frac{b-y}{b-a}\right)^{m} + \sum_{r=1}^{m} \binom{n+r-2}{r-1} \left(\frac{b-y}{b-a}\right)^{r-1} \left(\frac{y-a}{b-a}\right)^{n} = 1$$

Y como se está usando un cambio de variable,

$$x = \frac{y-a}{b-a} \implies dx = \frac{dy}{b-a}.$$

Por lo tanto, usando la identidad anterior, integración y las propiedades de la función beta podemos ver la siguiente observación.

Observación 3.4 *Sean* $a \neq b, \in \mathbb{R}^+$, $n, m \in \mathbb{N}, \forall z, w \in \mathbb{C}$ *tales que,* $\Re(z) > 0$, $\Re(w) > 0$, $\forall y \in (a, b)$. *Entonces se tiene lo siguiente,*

1)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\beta^{-1}(k,m)}{m+k-1} \left(\frac{y-a}{b-a}\right)^{k-1} \left(\frac{b-y}{b-a}\right)^{m} + \sum_{r=1}^{m} \frac{\beta^{-1}(r,n)}{n+r-1} \left(\frac{b-y}{b-a}\right)^{r-1} \left(\frac{y-a}{b-a}\right)^{n} = 1$$

2)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{m}{(k+m)(m+k-1)} + \sum_{r=1}^{m} \frac{n}{(r+n)(n+r-1)} = 1$$

3)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\beta^{-1}(k,m)\beta^{-1}(z,w)\beta(m+z,k)}{m+k-1} + \sum_{r=1}^{m} \frac{\beta^{-1}(r,n)\beta^{-1}(z,w)\beta(n+w,r)}{n+r-1} = 1$$

4)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\beta^{-1}(k,m)}{(m+k-1)(y-a)} \int_a^y \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^{k-1} \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{m} dt +$$
$$\sum_{r=1}^{m} \frac{\beta^{-1}(r,n)}{(n+r-1)(y-a)} \int_a^y \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{r-1} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^{n} dt = 1$$

De igual forma que en el apartado anterior, las funciones de distribución son los sumandos de las identidades anteriores y las aplicaciones son de carácter inmediato.

Referencias

[1] Aigner, Martin. *A course in enumeration.* Springer Science & Business Media, 2007.

[2] Apostol, Tom M. *Introducción a la teoría analítica de números.* Reverté, 1984.

[3] Balanzario, Eugenio P. *Breviario de teoría analítica de los números.* Sociedad Matemática Mexicana, 2008.

[4] Bogart, Kenneth P. *Introductory combinatorics.* Saunders College Publishing, 1989.

[5] Comtet, Louis. *Analyse combinatoire: Vol. 1.* Presses Universitaires de France, 1970.

[6] Friedlander, John B. and Heath-Brown, DR and Iwaniec, H. and Kaczorowski, J. *Analytic number theory.* Springer, 1891.

[7] Gupta, Hansraj. *Selected topics in number theory.* Abacus Press, 1980.

[8] Ivic, Aleksandar. *The Riemann zeta-function: theory and applications.* Courier Corporation, 2012.

[9] Ríbnikov, Konstantin. *Análisis combinatorio.* Mir, 1988.

[10] Ríbnikov, Konstantin. *Análisis combinatorio: problemas y ejercicios.* Mir, 1989.

[11] Rosen, Kenneth H. *Handbook of discrete and combinatorial mathematics.* CRC Press, 2000.

[12] Rota, Gian-Carlo and Doubilet, P. *Finite operator calculus.* Academic Press, 1975.