Iteraciones sobre el operador Σ respecto de los conjuntos de factores los números Naturales y algunos ejemplos

Mat. Enrique Torres Miguel

kike_torres@ciencias.unam.mx

16 de septiembre de 2021

Resumen

Se presentan conceptos clásicos de la teoría de los números presentes en la definición de suma sobre los factores de un número natural, mostrando que las iteraciones sobre este tipos de sumas satisfacen la propiedad lineal desde un punto de vista elemental

1. Introducción

En el estudio de la teoría de números, es común centrarse en ciertas propiedades de los números Naturales, tales como la forma de escindir a un número natural en sus factores, especialmente en su descomposición canónica prima, es decir, en potencias sus factores primos. En este contexto, no es de sorprender que al definir el operador Σ sobre el conjunto de los factores de un número natural, exista una relación entre las funciones aritméticas y la propiedad lineal en la iteración del operador Suma sobre las funciones aritméticas. Por lo tanto, el objetivo de este texto es revisar de forma breve la propiedad lineal en la iteración, aplicada sobre el conjunto de factores de un número natural y mostrar su conexión con el álgebra matricial, lo que sirve como referencia para el estudio general de las Iteraciones sobre el operador Σ respecto de conjuntos arbitrarios de números Naturales y su representación matricial asociada.

Comencemos con algunas definiciones usuales.

Definición 1.1 *Sean $n, n_1, \ldots n_m, m \in \mathbb{N}$ y sean $p_1, \ldots, p_m$ números primos tales que $n = p_1^{n_1} \cdots p_m^{n_m}$. Entonces se dirá que $p_1^{n_1} \cdots p_m^{n_m}$ es la descomposición prima de n.*

De la definición anterior se tiene que,

Observación 1.2 *Sea* $n \in \mathbb{N}$ *y* $n = p_1^{n_1} \cdots p_m^{n_m}$. *su factorización canónica, entonces resulta inmediato lo siguiente,*

i) $d \mid n$, *es decir,* d *es un factor de* n, *sí, y solo sí,* $d = p_1^{a_1} \cdots p_m^{a_b}$ *donde,* $b \leq m$ *y* $a_i \leq n_i$ $\forall i$.

ii) $d \mid n$ *sí, y solo sí,* $\dfrac{n}{d}$ *es un factor de* n.

2. Iteraciones sobre el operador $\sum_{d|n}[\ ]$

Ahora, ya tenemos los conceptos necesarios para definir la suma sobre los factores de un número natural n. Propiamente, lo que se define es un operador aditivo $\sum_{d|n}[\ ]$, sin pérdida de generalidad, asociado con las funciones aritméticas.

De forma análoga al operador $\sum_{k=1}^{n}[\ ]$, se definirán las iteraciones del operador $\sum_{d|n}[\ ]$ sobre $A(\mathbb{N})$ y se revisará la propiedad lineal en las iteraciones.

Definición 2.1 *Sea* $f \in A(\mathbb{N})$ *y* $n \in \mathbb{N}$. *Diremos que la suma respecto a los factores de* n *de la función aritmética* f, *es la función aritmética* h *tal que*

$$h(n) = f(d_1) + \cdots + f(d_m),$$

donde, $d_1, \cdots d_m$ *son todos los factores de* n. *Y se denotará de forma usual como,* $h(n) = \sum_{d|n} f(d) = \sum_{n=dp} f(d)$.

Y por otra parte, recordemos la definición de producto de Cauchy o convolución.

Definición 2.2 *Sean* $f, g \in A(\mathbb{N})$ *se dice que el producto de Cauchy de las funciones* f *y* g *es una función aritmética* h *talque,*

$$h(n) = \sum_{d|n} f(d) g(\frac{n}{d}) = \sum_{n=dp} f(d) g(p)$$

y la se denota de forma usual como, $h(n) = f(n) \star g(n)$.

De la **Definición 2.2** es inmediato que, $= f(n) \star g(n) = g(n) \star f(n)$.

Una vez que se ha definido el operado $\sum_{d|n}[\ ]$ sobre las funciones aritméticas, vamos a proceder con las definiciones comunes, utilizando nuestra notación iterativa.

Definición 2.3 *Sea $f \in A(\mathbb{N})$ y $r, n \in \mathbb{N}$. Diremos que la función iterada de grado r de la función f sobre el operador $\sum_{d|n}[\ ]$, es una función aritmética h tal que*

$$h(n) = \sum_{d_1|n} \sum_{d_2|d_1} \cdots \sum_{d_{r-1}|d_{r-2}} \sum_{d_r|d_{r-1}} f(d_r)$$

y la denotaremos como

$$\sum_{d|n}{}_{r} f(d).$$

Definición 2.4 *Sea $f \in A(\mathbb{N})$. Diremos que la función f, es su iterada de grado 0 sobre el operador $\sum_{d|n}[\ ]$ y lo denotaremos como,*

$$f(n) = \sum_{d|n}{}_{0} f(d).$$

Definición 2.5 *Sea $f \in A(\mathbb{N})$, $n, r \in \mathbb{N}$. Diremos que la función iterada inversa de grado -r de la función f sobre el operador $\sum_{d|n}[\ ]$, es una función aritmética h tal que*

$$f(n) = \sum_{d_1|n} \sum_{d_2|d_1} \cdots \sum_{d_{r-1}|d_{r-2}} \sum_{d_r|d_{r-1}} h(d_r)$$

y la denotaremos como,

$$\sum_{d|n}{}_{-r} f(d).$$

Como es usual en la teoría analítica de los números, representaremos a la función divisor como δ, es decir, la función que da el número de divisores de un número natural. Entonces podemos ver la siguiente observación.

Observación 2.6 *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $n = p_1^{n_1} \cdots p_m^{n_m}$, su representación canónica, entonces veamos los siguiente.*

i) $\delta(n) = \sum_{d|n}(f(d) = 1)$

ii) $\delta(n) = (n_1 + 1) \cdots (n_m + 1)$

Ahora, que se ha introducido la función divisor, podemos establecer una definición más.

Definición 2.7 *Sea $r \in \mathbb{Z}$ definimos a la función aritmética δ_r como,*

$$\delta_r(n) = \sum_{d|n}{}_{r-1} 1.$$

Observación 2.8 *$\forall r \in \mathbb{Z}$ se tiene que,*

i) $\delta_{r+1}(n) = \sum_{d|n} \delta_r(d).$

ii) $\sum_{d|n}{}_r 1 = \sum_{k_1=1}^{n_1+1}{}_r 1 \cdots \sum_{k_m=1}^{n_m+1}{}_r 1.$

Por otra parte, demostremos el siguiente resultado.

Teorema 2.9 *Sean $f_1, f_2, g_1, g_2 \in A(\mathbb{N})$ tale que,*

$g_1(n) = \sum_{d|n} f_1(d)$ *y* $g_2(n) = \sum_{d|n} f_2(d).$

Entonce se tiene que,

$$\sum_{d|n} f_1(d) g_2(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n} f_2(d) g_1(\frac{n}{d}).$$

Demostración. Es inmediato, solo hay que utilizar la ***Observación 1.2*** *y la* ***Definición 2.1***

$$\begin{aligned}
\sum_{d|n} f_1(d) g_2(\frac{n}{d}) &= \sum_{n=d_1 d_2} f_1(d_1) g_2(d_2) \\
&= \sum_{n=d_1 d_2} f_1(d_1) \sum_{d_2=p_1 p_2} f_2(p_1) \\
&= \sum_{n=d_1 p_1 p_2} f_1(d_1) f_2(p_1) \\
&= \sum_{n=d_1 p_1 p_2} f_1(p_1) f_2(d_1) \\
&= \sum_{n=d_1 p_1 p_2} f_2(d_1) f_1(p_1) \\
&= \sum_{n=d_1 d_2} f_2(d_1) \sum_{d_2=p_1 p_2} f_1(p_1) \\
&= \sum_{n=d_1 d_2} f_2(d_1) g_1(d_2) \\
&= \sum_{d|n} f_2(d) g_1(\frac{n}{d}).
\end{aligned}$$

■

Por otro lado, del teorema anterior se demuestra fácil el siguiente resultado.

Teorema 2.10 *Sean $f \in A(\mathbb{N})$, $r \in \mathbb{Z}$. Demostrar que*

$$\sum_{d|n}{}_{r} f(n) = \sum_{d|n} \delta_r(d) f(n/d)$$

Demostración. Se prueba utilizado inducción, basta con recordar que $\forall r$ se tiene que,

$$\delta_{r+1}(n) = \sum_{d|n} \delta_r(d).$$

y suponiendo que, $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$. Entonces, utilizando el ***Teorema 2.9*** *se sigue que,*

$$\sum_{d|n} f(d)\delta_{r+1}(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n} g(d)\delta_r(\frac{n}{d})$$

Y aplicando la hipótesis de inducción,

$$\sum_{d|n}{}_{r} g(d) = \sum_{d|n} g(d)\delta_r(\frac{n}{d}).$$

Por lo tanto,

$$\sum_{d|n}{}_{r+1} f(d) = \sum_{d|n} f(d)\delta_{r+1}(\frac{n}{d}).$$

■

Con este último resultado se expone la linealidad en la iteración del operador $\sum_{d|n}[\ ]$ sobre las funciones aritméticas, fundamentada solo con las propiedades aritméticas de los números naturales. Para finalizar este apartado solo daremos una extensión compleja de la función aritméticas $\delta_r(n)$ y la correspondiente extensión compleja del concepto de iterada de orden complejo.

Definición 2.11 *Sean $\forall z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ y $n = p_1^{n_1} \cdots p_m^{n_m}$. la factorización canónica de n, se define la función aritmética $\delta_z(n)$ como,*

$$\delta_z(n) = \theta_z(n_1 + 1) \cdots \theta_z(n_m + 1)$$

Donde,

$$\theta_z(n_i) = \sum_{k_i=1}^{n_1}{}_{z} \left[\frac{1}{k}\right] = \begin{cases} \frac{z^{\overline{n_i - 1}}}{(n_i-1)!}, & z \neq 0\ , \\ \left[\frac{1}{n_i}\right] & z = 0. \end{cases}$$

Definición 2.12 *Sean $f \in A(\mathbb{N})$ y $z \in \mathbb{C}$. Diremos que la función iterada de grado z de la función f sobre el operador $\sum_{d|n}[\ ]$ es una función aritmética h tal que,*

$$h(n) = \sum_{d|n} \delta_z(d) f(n/d)$$

y la denotaremos como

$$h(n) = \sum_{d|n}{}_{z} f(d).$$

3. Ejemplos de iteradas sobre el operador $\sum_{d|n}[\ ]$

Para esta sección se utilizará lo visto en Iteraciones sobre el operador Σ respecto a una matiz, propiedades y algunos ejemplos. Por lo tanto, se entenderá que se esta familiarizado con los conceptos y la notación.

Problema 3.1 *Demostrar $\forall z \in \mathbb{C}$ que,*

$$\sum_{d|n}{}_{z} \Lambda(d) = \begin{cases} \frac{-\delta_z(n)}{z}\log(n), & z \neq 0\ , \\ \\ \Lambda(n) & z = 0. \end{cases}$$

Problema 3.2 *Sean $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n, m \in \mathbb{N}$ y $n = p_1^{n_1} \cdots p_t^{n_t}$ la descomposición canónica de n. Demostrar que,*

$$\sum_{d|n}{}_{m} d^z = \left(\left(\frac{p_1^z}{p_1^z - 1} \right)^m p_1^{zn_1} - \sum_{r=1}^{m}{}_{n_1+1} \left(\frac{1}{p_1^z} \right) \left(\frac{p_1^z}{p_1^z - 1} \right)^r \right) \cdots$$
$$\left(\left(\frac{p_t^z}{p_t^z - 1} \right)^m p_t^{zn_t} - \sum_{r=1}^{m}{}_{n_t+1} \left(\frac{1}{p_t^z} \right) \left(\frac{p_t^z}{p_t^z - 1} \right)^r \right)$$

Problema 3.3 *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $n = p_1^{n_1} \cdots p_m^{n_m}$ la descomposición canónica de n. Demostrar que,*

$$\sum_{d|n} \delta_{\frac{1}{2}}(d) = \frac{(2n_1+1)}{4^{n_1}} \binom{2n_1}{n_1} \cdots \frac{(2n_m+1)}{4^{n_m}} \binom{2n_m}{n_m}$$

Problema 3.4 *Sean $z, w \in \mathbb{C}$ y $f \in A(\mathbb{N})$ Demostrar que,*

i)

$$\sum_{d|n}{}_{w} \delta_z(d) = \delta_{w+z}(n)$$

ii)

$$\sum_{d|n}{}_{w} \sum_{d_1|d}{}_{z} f(d_1) = \sum_{d|n}{}_{z} \sum_{d_1|d}{}_{w} f(d_1)$$

Problema 3.5 *Sean $p \in \mathbb{Z}$, $f, g \in A(\mathbb{N})$ y $\mathbb{D} = [D(n,m)]_{n,m\in\mathbb{N}} \in TI_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C})$ tal que,*

$$D(n,m) = \begin{cases} 1, & m \mid n \ , \\ \\ 0 & m \nmid n. \end{cases}$$

Demostrar que,

i)

$$D^p(n,m) = \begin{cases} \delta_p(\frac{n}{m}), & m \mid n \ , \\ \\ 0 & m \nmid n. \end{cases}$$

ii)

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[p,D]} f(k) = \sum_{d|n}{}_{p} f(d)$$

iii) $f(n) *^{\mathbb{D}} g(n) = f(n) \star g(n)$

Problema 3.6 *Sean $z, w \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{N}$, y $f \in A(\mathbb{N})$ y definamos lo siguiente,*

a) $\upsilon_w(x,n) = n^x \delta_w(n)$.

b) $\varphi_x^{\prec t \succ}(n) = \underbrace{\varphi_x(n) \star \cdots \star \varphi_x(n)}_{t-veces}$

donde,

$$\varphi_x(n) = \sum_{d|n}{}_{-1} d^x$$

b_1) $\varphi_x^{\prec -t \succ}(n) = \underbrace{h_{\varphi_x}(n) \star \cdots \star h_{\varphi_x}(n)}_{t-veces}$

donde,

$$\varphi_x(n) \star h_{\varphi_x}(n) = \left[\frac{1}{n}\right]$$

c) $\sigma_x^{\prec t \succ}(n) = \underbrace{\sigma_x(n) \star \cdots \star \sigma_x(n)}_{t-veces}$

donde,

$$\sigma_x(n) = \sum_{d|n} d^x$$

c$_1$*)* $\sigma_x^{\prec -t \succ}(n) = \underbrace{h_{\sigma_x}(n) \star \cdots \star h_{\sigma_x}(n)}_{t-veces}$

donde,

$$\sigma_x(n) \star h_{\sigma_x}(n) = \left[\frac{1}{n}\right]$$

d) $\mathbb{E} = [E(n,m)]_{n,m\in\mathbb{N}}$ *tal que,*

$$E(n,m) = \begin{cases} m^x, & m \mid n \ , \\ \\ 0 & m \nmid n. \end{cases}$$

Desmostar que,

i) $\upsilon_w(x,n) \star \upsilon_z(x,n) = \upsilon_{w+z}(x,n)$

ii) $\upsilon_w(x,n) \star f(n) = n^x \sum_{d|n}{}_w \dfrac{f(n)}{d^x}$

iii) $\upsilon_w^{\prec p \succ}(x,n) = \upsilon_{pw}(x,n)$

iv) $\varphi_x(v) \star \sigma_x(n) = \upsilon_2(x,n)$

iv) $\varphi_x^{\prec 2p \succ}(n) = \sum_{d|n}{}_{-p} \upsilon_{2p}(x,d)$

v)

$$E^{-1}(n,m) = \begin{cases} \frac{\delta_1(\frac{n}{m})}{n^x,} & m \mid n \ , \\ \\ 0 & m \nmid n. \end{cases}$$

vi) $\sum_{k=1}^{n}{}_{\mathbb{E}} f(k) = g(n) \Leftrightarrow f(n) = \sum_{d|n}{}_{-1} \dfrac{g(d)}{n^x}$

Es claro que los ejemplos presentados han sido ampliamente estudiados por diversos autores, lo único que se realizo de forma independiente es mostrar como pueden ser desarrollados con nuestra notación iterativa. El objetivo principal fue introducir el concepto de iterada sobre el operador $\sum_{d|n}[\ ]$ ya que servirá como un punto de comparación con el operador $\sum_{k=1}^{n}[\ ]$, para mostrar la idea general de suma sobre conjuntos arbitrarios de números naturales, definiendo operadores aditivos que cumplirán las propiedad lineal en la iteración sobre funciones aritméticas.

Referencias

[1] Aigner, Martin. *A course in enumeration.* Springer Science & Business Media, 2007.

[2] Apostol, Tom M. *Introducción a la teoría analítica de números.* Reverté, 1984.

[3] Balanzario, Eugenio P. *Breviario de teoría analítica de los números.* Sociedad Matemática Mexicana, 2008.

[4] Bogart, Kenneth P. *Introductory combinatorics.* Saunders College Publishing, 1989.

[5] Comtet, Louis. *Analyse combinatoire: Vol. 1.* Presses Universitaires de France, 1970.

[6] Friedlander, John B. and Heath-Brown, DR and Iwaniec, H. and Kaczorowski, J. *Analytic number theory.* Springer, 1891.

[7] Gupta, Hansraj. *Selected topics in number theory.* Abacus Press, 1980.

[8] Ivic, Aleksandar. *The Riemann zeta-function: theory and applications.* Courier Corporation, 2012.

[9] Ríbnikov, Konstantin. *Análisis combinatorio.* Mir, 1988.

[10] Ríbnikov, Konstantin. *Análisis combinatorio: problemas y ejercicios.* Mir, 1989.

[11] Rosen, Kenneth H. *Handbook of discrete and combinatorial mathematics.* CRC Press, 2000.

[12] Rota, Gian-Carlo and Doubilet, P. *Finite operator calculus.* Academic Press, 1975.

[13] Vinográdov, Iván M. *Fundamentos de la teoría de los números.* Mir, 1997.