Iteraciones, Σ_z y $\pm 1/2$-Transformación.

Mat. Enrique Torres Miguel

kike_torres@ciencias.unam.mx

22 de febrero de 2022

Resumen

El principal objetivo es deducir las expresiones generales de $\Sigma_{\pm 1/2}$ para cualquier función aritmética f, por medio de la relación que existente entre $\pm 1/2$-Transformación y $\Sigma_{\pm 1/2}$, todo desde el punto de vista iterativo. De igual forma se revisa de forma breve la idea de operador aditivo tomando como referencias Σ_z.

1. Iteraciones del operado Σ sobre funciones aritméticas

De forma usual se denota al conjunto de las funciones aritméticas como $A(\mathbb{N}) = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}\}$. Recordemos las siguientes definiciones.

Definición 1.1 *Sea $f \in A(\mathbb{N})$ y $m \in \mathbb{N}$. La función iterada de grado m de la función f, respecto al operador Suma es la función aritmética h tal que,*

$$h(n) = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{k_1} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} f(k_m)$$

y se denotará como,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} f(k).$$

Esto es,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} f(k) = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{k_1} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} f(k_m).$$

Observación 1.2 *Para cualquier función aritmética f, se define a la misma función f como su función iterada de grado 0 y esto se denota como*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{0} f(k) = f(n).$$

Análogamente se tiene la siguiente definición.

Definición 1.3 *Sea $f \in A(\mathbb{N})$ y $m \in \mathbb{N}$. La función iterada recíproca de grado m respecto al operador Suma de la función f, es una función aritmética h tal que,*

$$f(n) = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{k_1} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} h(k_m)$$

y se denota como,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-m} f(k).$$

Definición 1.4 *Sean $n \in \mathbb{N},\ \ m \in \mathbb{Z}$. Entonces se define la siguiente función como,*

$$\theta_m(n) = \sum_{k=1}^{n}{}_{m} \left[\frac{1}{k}\right].$$

Por lo tanto, de las definiciones anteriores se puede demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\theta_m(n) = \begin{cases} \binom{m+k-2}{k-1}, & m > 0, \\ \left[\frac{1}{n}\right], & m = 0, \\ (-1)^{n-1}\binom{-m}{n-1}, & m < 0. \end{cases}$$

Y con ellos se obtiene el seguiente resultado,

Teorema 1.5 *Para cualquier función aritmética f se tiene que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_m(n+1-k) f(k) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z}$$

La demostración es básica por inducción.

Esto es la referencia básica de la linealidad en la iteración del operador Σ, salvo la notación empleada, lo demás se puede revisar en las referencias de forma completa en términos de Operador de diferencias Δ y antidiferencias finitas $\triangledown$ haciendo referencias a los operadores continuos de integración y derivación, las propiedades que se obtienen usando esta analogía son muy sorprendentes, pero para el caso discreto se puede adoptar una forma unificada de obtener los resultados, dejando todo en función de un solo operador como lo presentamos aquí, todo se hace en relación con el operador Σ porque tanto el operador Δ y $\triangledown$ involucran una suma aplicada a funciones aritméticas.

2. Definición de Σ_z

Primero, recordemos que las generalizaciones de los factoriales complejos son las siguientes,

- $z^{\underline{n}} = z(z-1)...(z-n+1)$
- $z^{\overline{n}} = z(z+1)...(z+n-1)$

Y cumple la siguiente relación,

- $z^{\overline{n}} = (-1)^n(-z)^{\underline{n}}$

Por lo tanto, los factoriales pueden ser descritos en términos de la función Gamma,

- $z^{\overline{n}} = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)} \qquad \Re(z) > 0$
- $z^{\overline{-n}} = (-1)^n \frac{1}{(1-z)^{\overline{n}}}$

Así, usando las propiedades anteriores podemos extender la función $\theta_m(n)$ para caso complejo.

Definición 2.1 *Para cualquier $z \in \mathbb{C}$ y $\forall n \in \mathbb{N}$ definimos la función $\theta_z(n)$ como;*

$$\theta_z(n) = \begin{cases} \dfrac{(z)^{\overline{n-1}}}{(n-1)!}, & \forall z \neq 0 \ , \\ \left[\frac{1}{n}\right], & z = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, se tiene lo siguiente.

Definición 2.2 *Sea $f \in A(\mathbb{N})$ y $z \in \mathbb{C}$. Diremos que la función iterada de grado z de la función f, es una función aritmética g tal que*

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} \theta_z(n+1-k)f(k)$$

y la denotaremos como

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{z} f(k).$$

Es claro que esta definición extiende a las **Definición 1.1** y **Definición 1.3** porque al considerar valores enteros, coincide con las iteraciones respecto del operador Σ, evidentemente la iterada de grado negativo con esta extensión es la iterada reciproca de la **Definición 1.3**, mostrar la distinción en ambos casos es sencillo, ya que en la **Definición 2.2** se define un operador aditivo Σ_z el cual se obtiene como resultado de aplicar la suma de una función aritmética **f** sobre el operador Σ respecto de una función fija $\theta_z(n)$. Análogamente, se pueden definir iteraciones sobre el operador Σ_z para cualquier función aritmética **f**. Sin embrago, hacer esto es solo un caso particular pero que merece la pena ser mencionado por las propiedades que tienen los factoriales complejos. A continuación mostraremos la idea de iteraciones respecto a cualquier función aritmética **g** fija sobre el operador Σ lo cual define un operador aditivo Σ_g.

Definición 2.3 *Sean $f \in A(\mathbb{N})$ y $m \in \mathbb{N}$. Diremos que la función iterada de grado m de f respecto de la función aritmética g es una función aritmética h tal que,*

$$h(n) = \sum_{k_1=1}^{n} g(n-k_1+1) \sum_{k_2=1}^{k_1} g(k_1-k_2+1) \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} g(k_{m-2}-k_{m-1}+1) \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} g(k_{m-1}-k_m+1)f(k_m)$$

y la denotaremos como,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[m,g(n)]} f(k).$$

Definición 2.4 *Sea $f \in A(\mathbb{N})$. Diremos que f es su función iterada de grado 0 respecto de g y denotaremos esto como,*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[0,g(n)]} f(k) = f(n).$$

Definición 2.5 *Sean $f, g \in A(\mathbb{N})$ con $g(1){\neq}0$ y $m \in \mathbb{N}$. Diremos que la función iterada reciproca de grado m f respecto de la función g es una función aritmética h tal que,*

$$f(n) = \sum_{k_1=1}^{n} g(n-k_1+1) \sum_{k_2=1}^{k_1} g(k_1-k_2+1) \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} g(k_{m-2}-k_{m-1}+1) \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} g(k_{m-1}-k_m+1)h(k_m)$$

y la denotaremos como,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[-m,g(n)]} f(k).$$

Observación 2.6 *Es claro que sin la restricción $g(1){\neq}0$ se tiene una definición absurda y la respuesta es simple, si g(1)=0 y f(1)≠0, entonces no es posible hallar una función h tal que, f(1)=g(1) h(1). Con esto podemos ver que la existencia de*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[-m,g(n)]} f(k)$$

depende de la naturaleza de la función ***g*** *y es independiente de la función aritmética* ***f*** *sobre la cual se trabaja.*

Definición 2.7 *Sean $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ y $g \in A_0(\mathbb{N})$. Entonces definimos la siguiente función*

$$\theta_{[m,g(n)]}(n) = \sum_{k=1}^{n}{}_{[m,g(n)]} \left[\frac{1}{k}\right].$$

Teorema 2.8 *Sean $g, f \in A(\mathbb{N})$ tal que $g(1){\neq}0$, entonces tenemos que,*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[m,g(n)]} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_{[m,g(n)]}(k) f(n-k+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z}$$

La demostración se realiza por inducción y usando convolución de Cauchy, optaremos por omitirla ya que lo único que se hace es considerar las potencias sobre el producto de Cauchy de la función g las cuales definen a la función $\theta_{[m,g(n)]}(n)$.

Como ya se había mencionado, en el resultado anterior se muestra la linealidad en la iteración sobre un operador aditivo Σ_g. Este tipo de operadores aditivos se extienden de forma general sobre matrices infinitas, lo cual permite entender la linealidad en las iteraciones sobre operadores aditivos, porque están estrechamente ligadas con las potencias de las matrices. Ahora, ya podemos revisar el objetivo principal, estudiar la relación entre el operador Σ_z para el caso cuando $z = 1/2$ y la 1/2-Transformación.

3. $\pm 1/2$-Transformación y $\Sigma_{\pm 1/2}$

Recordemos que los números de Catalán esta definidos como,

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}, \quad C_0 = 1.$$

Y su expresión general esta dada por,

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Ahora, considerando su función generatriz,

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n.$$

Usando lo anterior, convolución y su definición se tiene que, $C^2(z) - \dfrac{C(z)}{z} + \dfrac{1}{z} = 0.$

Por lo tanto, obteniendo las raíces se tiene que, $C(z) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z}.$

Por otro lado, recordando que

$$\sqrt{1+y} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} y^n.$$

Entonces, tomando $y = -4z$, manipulando y comparando coeficientes esto da lugar a las definición de la **1/2 - Transfomación**.

$\left(\frac{1}{2}\right) - Trasformación$:

$$\binom{1/2}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(2n-1)}\binom{2n}{n} \tag{1a}$$

Y con argumentos análogos se obtiene,

$\left(-\frac{1}{2}\right) - Trasformación$:

$$\binom{-1/2}{n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\binom{2n}{n}. \tag{2a}$$

Por otra parte, pongamos atención el la siguiente propiedad de la función gamma,

$$\Gamma(n+1/2) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\Gamma(1/2) \tag{3a}$$

Ahora, por la **Definición 2.1** sabemos que para $z = \dfrac{1}{2}$ y usando la función gamma tenemos una expresión para la función aritmética $\theta_{1/2}(n)$,

$$\theta_{1/2}(n) = \frac{(1/2)^{\overline{n-1}}}{(n-1)!} = \frac{\Gamma(n+1/2-1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(n)} = \frac{\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(n)}$$

Entonces usando (1a) y (3a) se tiene que,

$$\theta_{1/2}(n) = \frac{2n}{2^{2n}(2n-1)}\binom{2n}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{4a}$$

Por otra parte, para obtener $\theta_{-1/2}(n)$ usemos iteraciones y la expresión (4a). Notemos que por la **Definición 2.1** se sigue que,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-\frac{1}{2}} 1 = \sum_{k=1}^{n} \theta_{-1/2}(k) = \theta_{1/2}(n).$$

Aplicando Σ_{-1} se tiene que,

$$\sum_{k_1=1}^{n}{}_{-1} \sum_{k_2=1}^{k_1}{}_{-\frac{1}{2}} 1 = \sum_{k_1=1}^{n}{}_{-1} \sum_{k_2=1}^{k_1} \theta_{-1/2}(k_2) = \sum_{k=1}^{n}{}_{-1} \theta_{1/2}(k).$$

Entonces,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-1-\frac{1}{2}} 1 = \sum_{k=1}^{n}{}_{-1+1} \theta_{-1/2}(k) = \sum_{k=1}^{n}{}_{-1} \theta_{1/2}(k).$$

Por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-\frac{3}{2}} 1 = \sum_{k=1}^{n}{}_{0} \theta_{-1/2}(k) = \sum_{k=1}^{n}{}_{-1} \theta_{1/2}(k).$$

Y por la **Observación 1.2** se sigue que,

$$\theta_{-1/2}(n) = \sum_{k=1}^{n}{}_{-1} \theta_{1/2}(k).$$

Usando la **Definición 1.3** tenemos que,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-1} \theta_{1/2}(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_{-1}(k)\theta_{1/2}(n+1-k).$$

Y por la **Definición 1.4**,

$$\theta_{-1}(n) = (-1)^{n-1}\binom{1}{n-1}.$$

Así, tenemos que,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}{}_{-1} \theta_{1/2}(k) &= \sum_{k=1}^{n} \theta_{-1}(k)\theta_{1/2}(n+1-k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\binom{1}{k-1}\theta_{1/2}(n+1-k) \\
&= \theta_{1/2}(n) - \theta_{1/2}(n-1) \\
&= \frac{2n}{2^{2n}(2n-1)}\binom{2n}{n} - \frac{2(n-1)}{2^{2(n-1)}(2(n-1)-1)}\binom{2(n-1)}{n-1} \\
&= \frac{2n}{2^{2n}(2n-1)}\binom{2n}{n} - \frac{2(n-1)}{2^{2(n-1)}(2(n-1)-1)}\left(\frac{n}{2(2n-1)}\right)\binom{2n}{n} \\
&= \frac{2n}{2^{2n}(2n-1)}\binom{2n}{n}\left(1 - \frac{2n-2}{2n-3}\right) \\
&= \frac{2n}{2^{2n}(2n-1)}\binom{2n}{n}\left(\frac{-1}{2n-3}\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, ya se obtuvo el valor para $\theta_{-1/2}(n)$,

$$\theta_{-1/2}(n) = \frac{(-1/2)^{\overline{n-1}}}{(n-1)!} = \frac{2n}{2^{2n}(2n-1)(3-2n)}\binom{2n}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5a}$$

Por otra parte, es inmediato notar que,

$$\theta_{1/2}(n) = (3-2n)\theta_{-1/2}(n). \tag{6a}$$

4. Algunas identidades de Σ_z y $\Sigma_{\pm 1/2}$

Primero consideremos una función aritmética *f*, entonces tenemos que,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}{}_{\frac{1}{2}} f(k) &= \sum_{k=1}^{n} \theta_{1/2}(k) f(n+1-k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{2^{2k}(2k-1)}\binom{2k}{k} f(n+1-k) \quad por \quad (4a) \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}{}_{-\frac{1}{2}} f(k) &= \sum_{k=1}^{n} \theta_{-1/2}(k) f(n+1-k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{2^{2k}(2k-1)(3-2k)}\binom{2k}{k} f(n+1-k) \quad por \quad (5a) \end{aligned}$$

Usando (6a) se tiene que,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{\frac{1}{2}} f(k) = \sum_{k=1}^{n} (3-2k)\,\theta_{-1/2}(k) f(n+1-k)$$

Ahora, usando $f(n) = \theta_z(n)$ se tiene que,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{\frac{1}{2}} \theta_z(k) = \sum_{k=1}^{n} (3-2k)\,\theta_{-1/2}(k)\theta_z(n+1-k).$$

Entonces,

$$\theta_{z+\frac{1}{2}}(n) = 3\theta_{z-\frac{1}{2}}(n) - 2\sum_{k=1}^{n} k\theta_{-1/2}(k)\theta_z(n+1-k).$$

Por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{z} k\theta_{-1/2}(k) = \left(\frac{3}{2}\right)\theta_{z-\frac{1}{2}}(n) - \left(\frac{1}{2}\right)\theta_{z+\frac{1}{2}}(n).$$

Como se puede advertir con las identidades anteriores, la propiedad lineal que existe en la iteración de operadores aditivos sobre funciones aritméticas, es una herramienta muy útil que merece ser estudiada a detalle desde un punto de vista elemental.

5. Ejemplo numérico

Problema 5.1 *Hallar el valor de*

$$\sum_{k=1}^{7}{}_{\frac{1}{2}}\, k^3.$$

Solución.

Método 1[1]

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{7}{}_{\frac{1}{2}}\, k^3 &= \sum_{r=1}^{3} \frac{(-1)^{3-r}2(7)r!S(3,r)}{(2r+1)4^7} \frac{\binom{2(7)+2r}{7+r}\binom{7+r}{r}}{\binom{2r}{r}} \\
&= \sum_{r=1}^{3} \frac{(-1)^{3-r}14r!S(3,r)}{(2r+1)4^7} \frac{\binom{14+2r}{7+r}\binom{7+r}{r}}{\binom{2r}{r}} \\
&= \frac{(-1)^{2}14S(3,1)}{3*4^7} \frac{\binom{16}{8}\binom{8}{1}}{\binom{2}{1}} + \frac{(-1)^{1}28S(3,2)}{5*4^7} \frac{\binom{18}{9}\binom{9}{2}}{\binom{4}{2}} + \frac{(-1)^{0}84S(3,3)}{7*4^7} \frac{\binom{20}{10}\binom{10}{3}}{\binom{6}{3}} \\
&= \frac{14}{4^7}\binom{16}{8}\left(\frac{4}{3} - \frac{8*17}{5} + \frac{8*17*19}{35}\right) \\
&= \frac{14*12870}{4^7}\left(\frac{4}{3} - \frac{8*17}{5} + \frac{8*17*19}{35}\right) = 527{,}4521484375
\end{aligned}$$

Método 2

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{7}{}_{\frac{1}{2}}\, k^3 &= \sum_{k=1}^{7} \theta_{1/2}(k)(7+1-k)^3 \\
&= \sum_{k=1}^{7} \theta_{1/2}(k)(8-k)^3 \\
&= \sum_{k=1}^{7} \frac{2k}{2^{2k}(2k-1)}\binom{2k}{k}(8-k)^3 \\
&= \frac{2}{2^2*1}\binom{2}{1}7^3 + \frac{4}{2^4*3}\binom{4}{2}6^3 + \frac{6}{2^6*5}\binom{6}{3}5^3 + \frac{8}{2^8*7}\binom{8}{4}4^3 \\
&\quad + \frac{10}{2^{10}*9}\binom{10}{5}3^3 + \frac{12}{2^{12}*11}\binom{12}{6}2^3 + + \frac{14}{2^{14}*13}\binom{14}{7}1^3 \\
&= 7^3 + \frac{6^3}{2} + \frac{3*5^3}{2^3} + 20 + \frac{35*3^3}{2^7} + \frac{63}{2^5} + \frac{7*33}{2^{10}} = 527{,}4521484375
\end{aligned}$$

■

[1] Solo hay que usar los valores de los números de Stirling de segunda especie; $S(3,1) = 1$, $S(3,2) = 3$ y $S(3,3) = 1$.

Referencias

[1] Aigner, Martin. *A course in enumeration.* Springer Science & Business Media, 2007.

[2] Apostol, Tom M. *Introducción a la teoría analítica de números.* Reverté, 1984.

[3] Balanzario, Eugenio P. *Breviario de teoría analítica de los números.* Sociedad Matemática Mexicana, 2008.

[4] Bogart, Kenneth P. *Introductory combinatorics.* Saunders College Publishing, 1989.

[5] Comtet, Louis. *Analyse combinatoire: Vol. 1.* Presses Universitaires de France, 1970.

[6] Friedlander, John B. and Heath-Brown, DR and Iwaniec, H. and Kaczorowski, J. *Analytic number theory.* Springer, 1891.

[7] Gupta, Hansraj. *Selected topics in number theory.* Abacus Press, 1980.

[8] Ivic, Aleksandar. *The Riemann zeta-function: theory and applications.* Courier Corporation, 2012.

[9]Ríbnikov, Konstantin. *Análisis combinatorio.* Mir, 1988.

[10] Ríbnikov, Konstantin. *Análisis combinatorio: problemas y ejercicios.* Mir, 1989.

[11] Rosen, Kenneth H. *Handbook of discrete and combinatorial mathematics.* CRC Press, 2000.

[12] Rota, Gian-Carlo and Doubilet, P. *Finite operator calculus.* Academic Press, 1975.