Iteraciones sobre el operador Σ respecto a una matiz, propiedades y algunos ejemplos

Mat. Enrique Torres Miguel

kike_torres@ciencias.unam.mx

4 de septiembre de 2021

Resumen

Las iteraciones respecto a una matriz ha sido ampliamente desarrolladas con el estudio de coeficientes universales; los números de Stirling, los coeficientes binomiales, números de Catalán, entre otros más, la belleza de estos conceptos radica en que la muchas de las propiedades básicas de las recursiones aditivas sobre funciones aritméticas están fundamentadas por el álgebra matricial, por lo tanto, en este texto se estudian de forma simple dicha propiedad general aplicada a iteraciones de funciones sobre el operador Suma.

1. Introducción

Primero estudiemos las funciones tipo binomiales y algunas de sus propiedades. Sea $P(1,1) \in \mathbb{C}$ y consideremos una función aritmética $\mathbf{f}$ tal que,

$$P(n,m) = \begin{cases} P(n-1,m) + f(m)P(n-1,m-1) & 1 < m \leq n \ , \\ \\ 0 & n < m. \end{cases}$$

Entonces se tiene por su definición que,

$$\begin{aligned} P(2,1) &= P(1,1), \\ P(2,2) &= f(2)P(1,1), \\ \\ P(3,1) &= P(2,1) = P(1,1) \\ P(3,2) &= P(2,2) + f(2)P(2,1) = f(2)P(1,1) + f(2)P(1,1) = 2f(2)P(1,1) \\ P(3,3) &= f(3)P(2,2) = f(3)f(2)P(1,1), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(4,1) &= P(3,1) = P(1,1)\\
P(4,2) &= P(3,2) + f(2)P(3,1) = 2f(2)P(1,1) + f(2)P(1,1) = 3f(2)P(1,1)\\
P(4,3) &= P(3,3) + f(3)P(3,2) = f(3)f(2)P(1,1) + f(3)2f(2)P(1,1) = 3f(3)f(2)P(1,1)\\
P(4,4) &= f(4)P(3,3) = f(4)f(3)f(2)P(1,1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(5,1) &= P(4,1) = P(1,1)\\
P(5,2) &= P(4,2) + f(2)P(4,1) = 4f(2)P(1,1)\\
P(5,3) &= P(4,3) + f(3)P(4,2) = 3f(3)f(2)P(1,1) + f(3)3f(2)P(1,1) = 6f(3)f(2)P(1,1)\\
P(5,4) &= P(4,4) + f(4)P(4,3) = 4f(4)f(3)f(2)P(1,1)\\
P(5,5) &= f(5)f(4)f(3)f(2)P(1,1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(6,1) &= P(5,1) = P(1,1)\\
P(6,2) &= P(5,2) + f(2)P(5,1) = 4f(2)P(1,1) + f(2)P(1,1) = 5f(2)P(1,1)\\
P(6,3) &= P(5,3) + f(3)P(5,2) = 10f(3)f(2)P(1,1)\\
P(6,4) &= P(5,4) + f(4)P(5,3) = 10f(4)f(3)f(2)P(1,1)\\
P(6,5) &= P(5,5) + f(5)P(5,4) = 5f(5)f(4)f(3)f(2)P(1,1)\\
P(6,6) &= f(6)f(5)f(4)f(3)f(2)P(1,1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(7,1) &= P(6,1) = P(1,1)\\
P(7,2) &= P(6,2) + f(2)P(6,1) = 5f(2)P(1,1) + f(2)P(1,1) = 6f(2)P(1,1)\\
P(7,3) &= P(6,3) + f(3)P(6,2) = 15f(3)f(2)P(1,1)\\
P(7,4) &= P(6,4) + f(4)P(6,3) = 20f(4)f(3)f(2)P(1,1)\\
P(7,5) &= P(6,5) + f(5)P(6,4) = 15f(5)f(4)f(3)f(2)P(1,1)\\
P(7,6) &= P(6,6) + f(6)P(6,5) = 6f(6)f(5)f(4)f(3)f(2)P(1,1)\\
P(7,7) &= f(7)f(6)f(5)f(4)f(3)f(2)P(1,1),
\end{aligned}
$$

De lo anterior se deduce la siguiente forma general,

$$
\begin{aligned}
P(n+1;m+1) &= \binom{n}{m}\prod_{r=1}^{m} f(r+1)P(1,1)\\
P(n,1) &= P(1,1) \quad \forall n,m \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

En particular, considerando $f(1) = P(1,1)$ se tiene que,

$$P(n,m) = \binom{n-1}{m-1} \prod_{r=1}^{m} f(r). \tag{1a}$$

Y manipulando se obtiene,

$$\begin{aligned} P(n,m) &= \binom{n-1}{m-1} \prod_{r=1}^{m} f(r) \\ &= \left(\frac{m}{n}\right) \binom{n}{m} \prod_{r=1}^{m} f(r) \\ &= \left(\frac{m}{n}\right) \prod_{r=1}^{m} \left(\frac{n-r+1}{r}\right) f(r). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$P(n,m) = \left(\frac{m}{n}\right) \prod_{r=1}^{m} \left(\frac{n-r+1}{r}\right) f(r). \tag{2a}$$

Esta ultima expresión será útil para entender algunas propiedades sobre sumas que involucran producto de coeficientes tipo binomiales.

2. Representación matricial

Por otra parte, es fácil notar que para cualquier función de dos variables M(n,m) tiene al menos una expresión matricial asociada, $\mathbb{M}_{nxm}$ descrita como,

$$\mathbb{M}_{nxm} = \big(M(k,s)\big)_{k,s=1}^{n,m} = \begin{pmatrix} M(1,1) & \cdots & M(1,m) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ M(n,1) & \cdots & M(n,m) \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, es conveniente definir la matiz asociada a (1a) como un matriz triangular,

$$\mathbb{P}_{nxm} = \big(P(k,s)\big)_{k,r=1}^{n,m} = \left(\binom{k-1}{s-1} \prod_{r=1}^{s} f(r)\right)_{k,s=1}^{n,m}. \tag{3}$$

Entonces se tiene que,

$$\mathbb{P}_{nxm} = \begin{pmatrix} f(1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ f(1) & f(1)f(2) & 0 & \cdots & 0 \\ f(1) & 2f(1)f(2) & f(1)f(2)f(3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{n-1}{0} f(1) & \binom{n-1}{1} f(1)f(2) & \binom{n-1}{2} f(1)f(2)f(3) & \cdots & \binom{n-1}{m-1} f(1)\cdots f(m \end{pmatrix}$$

Ahora que se cambio a una representación matricial, lo siguiente es encontrar la matriz inversa para las versiones cuadradas de (3), para esto es suficiente revisar algunos valores de la matriz $\mathbb{P}_{nxn}$. Lo primero es considerar la restricción $f(n) \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ para que la versión cuadrada de la matriz (3) sea invertible, una vez eludiendo este hecho veamos lo siguiente.

$$\mathbb{P}_{1x1} = \begin{pmatrix} f(1) \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ \mathbb{P}_{1x1}^{-1} = \begin{pmatrix} f^{-1}(1) \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}_{2x2} = \begin{pmatrix} f(1) & 0 \\ f(1) & f(1)f(2) \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ \mathbb{P}_{2x2}^{-1} = \begin{pmatrix} f^{-1}(1) & 0 \\ -f^{-1}(1)f^{-1}(2) & f^{-1}(1)f^{-1}(2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}_{3x3} = \begin{pmatrix} f(1) & 0 & 0 \\ f(1) & f(1)f(2) & 0 \\ f(1) & 2f(1)f(2) & f(1)f(2)f(3) \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ \mathbb{P}_{3x3}^{-1} = \begin{pmatrix} f^{-1}(1) & 0 & 0 \\ -f^{-1}(1)f^{-1}(2) & f^{-1}(1)f^{-1}(2) & 0 \\ f^{-1}(1)f^{-1}(2)f^{-1}(3) & -2f^{-1}(1)f^{-1}(2)f^{-1}(3) & f^{-1}(1)f^{-1}(2)f^{-1}(3) \end{pmatrix}$$

De forma recursiva se obtiene que,

$$\mathbb{P}_{nxn}^{-1} = \left((-1)^{k-s} \binom{k-1}{s-1} \prod_{r=1}^{k} f^{-1}(r) \right)_{k,s=1}^{n,n} \tag{4}$$

Hasta este punto tenemos lo suficiente para introducir como se integran los conceptos de iteración y la propiedad lineal que está justificada en el álgebra de matrices, tomando como referencia a las funciones tipo binomiales y su representación matricial.

3. Definición de iteradas sobre el operador Σ respecto a una matriz

Primero recordemos algunos conceptos que cubran el caso general para aplicarlo en las funciones tipo binomiales.

Observación 3.1

i) $\mathbb{A}_2(\mathbb{N}) = \{f \mid f : \mathbb{N}x\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}\}$

ii) $M_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C}) = \{M = [f(p,q)]_{p\in\mathbb{N}}^{q\in\mathbb{N}} \ : \ f \in \mathbb{A}_2(\mathbb{N})\}$

iii) $TI_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C}) = \{M \in M_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C}) \mid M_n^m = 0 \ \ \forall n < m\}$

iv) $TII_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C}) = \{T \in TI_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C}) \mid T_n^n \neq 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}\}$

v) $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}$

vi) $\mathbb{A}^*(\mathbb{N}^*) = \{f \mid f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}\}$

vii)

$$\begin{gathered} \Pi_{axb} : M_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C}) \longrightarrow M_{axb}(\mathbb{C}) \\ \Pi_{axb}(T) \longmapsto T_{axb} = [T(r,s)]_{1\leq r\leq a}^{1\leq s\leq b} \end{gathered}$$

donde, $\Pi_{axa} = \Pi_a$.

Ahora tenemos lo necesario para introducir un concepto de operador Suma respecto una matiz. Nos centraremos solo en las matrices triangulares inferiores pero la definición pude hacerse para un caso más general.

Definición 3.2 *Sean $f \in A(\mathbb{N})$ y $T \in TI_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C})$. Diremos la suma de la f operador Σ respeto de la matriz T es una función aritmética h tal que,*

$$h(n) = \sum_{k=1}^{n} T(n,k) f(k)$$

y lo de notaremos como

$$h(n) = \sum_{k=1}^{n}{}_{T} f(k)$$

Para entender la definición anterior lo que se induce es un operador aditivo respecto a una matriz $T \in M_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C})$ sobre las funciones aritméticas, esto es,

$$\Sigma_T : A(\mathbb{N}) \to A(\mathbb{N}).$$

Por lo tanto, a partir de aquí vamos a suponer que se conoce el término de operador aditivo Σ_T.

Definición 3.3 *Sean $f \in A(\mathbb{N})$, $T \in TI_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C})$ y $m \in \mathbb{N}$. Diremos que la función iterada de grado m de f respecto del operador Σ_T es una función aritmética h tal que,*

$$h(n) = \sum_{k_1=1}^{n}{}_{T} \sum_{k_2=1}^{k_1}{}_{T} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}}{}_{T} \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}}{}_{T} f(k_m)$$

o de forma explicita,

$$h(n) = \sum_{k_1=1}^{n} T(n,k_1) \sum_{k_2=1}^{k_1} T(k_1,k_2) \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} T(k_{m-2},k_{m-1}) \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} T(k_{m-1},k_m) f(k_m)$$

y la denotaremos como

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[m,T]} f(k).$$

Definición 3.4 *Sean $f \in A(\mathbb{N})$ y $T \in TI_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C})$, entonces diremos que f es su función iterada de grado 0 respecto del operador Σ_T y denotaremos esto como*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[0,T]} f(k) = f(n).$$

Definición 3.5 *Sean $f \in A(\mathbb{N})$, $T \in TII_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C})$ y $m \in \mathbb{N}$. Diremos que la función iterada dual de grado m de f respecto del operador Σ_T es una función aritmética h tal que,*

$$f(n) = \sum_{k_1=1}^{n}{}_T \sum_{k_2=1}^{k_1}{}_T \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}}{}_T \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}}{}_T h(k_m)$$

o de forma explicita,

$$f(n) = \sum_{k_1=1}^{n} T(n,k_1) \sum_{k_2=1}^{k_1} T(k_1,k_2) \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} T(k_{m-2},k_{m-1}) \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} T(k_{m-1},k_m) h(k_m)$$

y la denotaremos como

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[-m,T]} f(k).$$

Como se puede ver en esta definición se ha supuesto que *T(n,n)*$\neq$0 y la respuesta es simple, ya que al asociar la matriz triangular T, se tiene que T es invertible sí, y sólo sí, sus entradas diagonales son distintas de cero. Así, la existencia de

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[-m,T]} f(k)$$

depende de la matriz $T \in ST_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C})$.

Definición 3.6 *Sean $p \in \mathbb{Z}$ y $T \in TII_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C})$. Entonces definimos la siguiente función*

$$\vartheta_p^T(s,t) = [\Pi^p(T)]_s^t = T^p(s,t)$$

Lo que describe está definición no es más que la entrada M_s^t de la matriz T^p que es una potencia entera de T. Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.7 *Sean $\forall n \in \mathbb{N}$, $f \in A(\mathbb{N})$, $p \in \mathbb{Z}$ y $T \in TII_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C})$. Entonces se tiene que,*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[p,T]} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \vartheta_p^T(n,k) f(k).$$

Demostración. Se sigue de la definición de producto matricial y de las definiciones de iteradas sobre el operador Σ_T.

i) Para $p = 0$ es claro porque $T^0 = \mathbb{I}$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \vartheta_0^T(n,k) f(k) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{n,k} f(k) = f(n).$$

Y por la Definición 3.4

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[0,T]} f(k) = f(n)$$

ii) Ahora supongamos que es cierto para alguna $p > 0$, es decir,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[p,T]} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \vartheta_p^T(n,k)f(k).$$

Se satisface, por otra parte recordemos que por el producto de matices

$$T^p(s,t) = \sum_{r=1}^{a} T^{p-1}(s,r)T(r,t).$$

Así por la hipótesis de inducción sabemos que,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[p,T]} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \vartheta_p^T(n,k)f(k).$$

Ahora aplicando el operador Σ_T se tiene que,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{T} \sum_{k_1=1}^{k}{}_{[p,T]} f(k) = \sum_{k=1}^{n}{}_{T} \sum_{k_1=1}^{k} \vartheta_p^T(k,k_1)f(k_1).$$

Entonces por la Definición 3.3 se tiene que,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[p+1,T]} f(k) = \sum_{k=1}^{n}{}_{T} \sum_{k_1=1}^{k} \vartheta_p^T(k,k_1)f(k_1).$$

Y por otra parte,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}{}_{T} \sum_{k_1=1}^{k} \vartheta_p^T(k,k_1)f(k_1) &= \sum_{k=1}^{n} T(n,k) \sum_{k_1=1}^{k} \vartheta_p^T(k,k_1)f(k_1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{k_1=1}^{k} T(n,k)\vartheta_p^T(k,k_1)f(k_1) \\
&= \sum_{k+k_1=n+1} T(n,k)\vartheta_p^T(k,k_1)f(k_1) \\
&= \sum_{k+k_1=n+1} T(n,k_1)\vartheta_p^T(k_1,k)f(k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{k_1=1}^{k} T(n,k_1)\vartheta_p^T(k_1,k)f(k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{k_1=1}^{k} T(n,k_1)T^p(k_1,k)f(k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{k_1=1}^{k} T(n,k_1)T^p(k_1,k) \right) f(k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} T^{p+1}(n,k)f(k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \vartheta_{p+1}^T(n,k)f(k).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto se sigue que,

$$
\sum_{k=1}^{n}{}_{[p+1,T]} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \vartheta_{p+1}^T(n,k)f(k).
$$

iii) Para $p < 0$ es análogo al caso anterior.
Con lo que se tiene demostrado el resultado.

■

Por último, solo definamos el producto de Cauchy para el operador Σ_T

Definición 3.8 *Sean $g, f \in A(\mathbb{N})$ y $T \in TII_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C})$. Diremos que la convolución de las funciones aritmeticas f y g es una función aritmética h tal que,*

$$h(n) = \sum_{k=1}^{n}{}_{T} f(k)g(n+1-k) = \sum_{k=1}^{n} T(n,k)f(k)g(n+1-k).$$

y lo denotaremos como,

$$h(n) = f(n) *^T g(n)$$

Este producto es claramente no abeliano en general. Para finalizar comentaremos que la propiedad lineal en la iteración del operado Σ se sustenta en álgebra de matrices y abarca una gran diversidad de casos, incluso cuando la suma no se realiza sobre funciones aritméticas.

4. Ejemplos de iteraciones del operado Σ respecto a una matriz

Problema 4.1 *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $f \in A(\mathbb{N})$ tal que,*

$$P(n,m) = \begin{cases} P(n-1,m) + f(m)P(n-1,m-1) & 1 < m \leq n \ , \\ \\ 0 & n < m. \end{cases}$$

Sin pérdida de generalidad, se consideran solo los casos $f(1) = P(1,1)$ Entonces por su definición y de su representación matricial se tiene que,

$$\mathbb{P}_{nxm} = \big(P(k,s)\big)_{k,r=1}^{n,m} = \left(\binom{k-1}{s-1} \prod_{r=1}^{s} f(r)\right)_{k,s=1}^{n,m}.$$

y

$$\mathbb{P}_{nxn}^{-1} = \left((-1)^{k-s}\binom{k-1}{s-1} \prod_{r=1}^{k} f^{-1}(r)\right)_{k,s=1}^{n,n}$$

I) Demostrar que son equivalentes,

i)

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \prod_{r=1}^{k} f(r)h(k) = g(n)$$

ii)

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n-1}{k-1} \prod_{r=1}^{n} f^{-1}(r)g(k) = h(n)$$

II) Sean $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ *y* $f(n) = 1$. *Entonces se tiene lo siguiente,*

i)

$$\vartheta_p^{\mathbb{P}}(n,m) = \begin{cases} \binom{n-1}{m-1} p^{n-1} & p \neq 0 \ , \\ \\ \left[\dfrac{1}{n}\right] & p = 0. \end{cases}$$

ii) $\forall h \in A(\mathbb{N})$

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[p,\mathbb{P}]} h(k) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} h(n+1-k) & p \neq 0 \ , \\ \\ h(n) & p = 0. \end{cases}$$

iii) $\forall h, g \in A(\mathbb{N})$

$$h(n) *^{\mathbb{P}} g(n) = g(n) *^{\mathbb{P}} h(n)$$

iv)

III) Sean $a, b, c, d, n, m \in \mathbb{N}$, $z_1, \cdots, z_a \in \mathbb{C}$, $w_1, \cdots w_b \in \mathbb{C}$ $q_1, \cdots, q_c \in \mathbb{C}$ *y* $g, h \in A(\mathbb{N})$.

Recordemos lo siguiente,

i)

$$z_i^{\overline{m}} = \begin{cases} z_i(z_i+1)(z_i+2)\cdots(z_i+m-1) & z_i \neq 0 \ , \\ \\ \left[\dfrac{1}{m}\right] & z_i = 0. \end{cases}$$

ii)

$$w_i^{\underline{m}} = \begin{cases} w_i(w_i-1)(w_i-2)\cdots(w_i-m+1) & w_i \neq 0 \ , \\ \\ \left[\dfrac{1}{m}\right] & w_i = 0. \end{cases}$$

iii)

$$\begin{bmatrix} d \\ m \end{bmatrix}_{q_i} = \begin{cases} \left(\frac{1-q_i^d}{1-q_i}\right)\left(\frac{1-q_i^{d-1}}{1-q_i^2}\right)\cdots\left(\frac{1-q_i^{d-m+1}}{1-q_i^m}\right) & q_i \neq 0 \ , \\ \\ 1 & q_i = 0. \end{cases}$$

Entonces definamos la siguiente función,

$$f(m) = \prod_{r_1=1}^{a} \prod_{r_2=1}^{b} \prod_{r_3=1}^{c} \left(\frac{1-q_{r_3}^{d-m+1}}{1-q_i^m}\right)(z_{r_1}+m-1)(w_{r_2}-m+1).$$

Demostrar que son equivalente

1)
$$h(n)=\prod_{r_1=1}^{a}\prod_{r_2=1}^{b}\prod_{r_3=1}^{c}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}z_{r_1}^{\overline{k}}w_{r_2}^{\underline{k}}\begin{bmatrix}d\\k\end{bmatrix}_{q_{r_3}}g(k)$$

2)
$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}(-1)^{n-k}h(k)=\prod_{r_1=1}^{a}\prod_{r_2=1}^{b}\prod_{r_3=1}^{c}z_{r_1}^{\overline{n}}w_{r_2}^{\underline{n}}\begin{bmatrix}d\\n\end{bmatrix}_{q_{r_3}}g(n)$$

Problema 4.2 *Sea* $f, h_f(n)\in A(\mathbb{N})$ *tal que* $f(1)\neq 0$. *y* $f(n)*h_f(n)=\left[\frac{1}{n}\right]$. *Por otra parte, sea*
$$F(n,m)=\begin{cases}f(n-m+1) & 1\leq m\leq n\ ,\\ \\ 0 & m>n\ .\end{cases}$$

Y definamos la matriz infinita,
$$\mathbb{F}=(F(n,m))_{n,m=0}^{\infty}.$$

Por último, $\forall p\in\mathbb{Z}$ *definamos la siguiente función,*
$$f^{\prec p\succ}(n)=\begin{cases}\underbrace{f(n)*\cdots*f(n)}_{p-veces} & p>0\ ,\\ \\ \left[\frac{1}{n}\right] & p=0\ ,\\ \\ \underbrace{h_f(n)*\cdots*h_f(n)}_{q-veces} & p<0,\ p=-q\ .\end{cases}$$

Entonces se puede demostrar lo siguiente.
i) $\forall p\in\mathbb{Z}$ *se tiene que,*
$$\vartheta_p^{\mathbb{F}}(n,m)=f^{\prec p\succ}(n+1-m)$$

ii) $\forall p\in\mathbb{Z}$, $\forall g\in A(\mathbb{N})$ *se tiene que,*
$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[p,\mathbb{F}]}\ g(k)=\sum_{k=1}^{n}f^{\prec p\succ}(k)g(n+1-k)$$

Es decir,
$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[p,\mathbb{F}]}\ g(k)=\sum_{k=1}^{n}{}_{[p,\,f(n)]}\ g(k)$$

iii) $\forall p \in \mathbb{Z}$, *y* $f \in A(\mathbb{N})$ *tal que,* $f(1) = 1$. *Entonces se tiene que,*

$$\vartheta_p^{\mathbb{P}}(n,m) = \theta_p(n-m+1) = \begin{cases} \binom{p+n-m-1}{n-m}, & p > 0, \\ \left[\frac{1}{n-m+1}\right], & p = 0, \\ (-1)^{n-m}\binom{-p}{n-m}, & p < 0. \end{cases}$$

iv) Sean $p \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{C}$, *y* $f \in A(\mathbb{N})$ *tal que,*

$$f(n) = \theta_z(n) = \begin{cases} \frac{z^{\overline{n-1}}}{(n-1)!}, & z \neq 0, \\ \left[\frac{1}{n}\right], & z = 0. \end{cases}.$$

Entonces se tiene que,

$$\vartheta_p^{\mathbb{P}}(n, n-m+1) = \theta_{pz}(m) \ \ \forall\, m = 1, \dots, n$$

Y por otra parte,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[p,\mathbb{P}]}\, g(k) = \sum_{k=1}^{n}{}_{[p,\theta_z(n)]}\, g(k) = \sum_{k=1}^{n}{}_{pz}\, g(k) \quad \forall g \in A(\mathbb{N})$$

Problema 4.3 *Sean* $f \in \mathbb{A}^*(\mathbb{N}^*)$ *y* $p \in \mathbb{Z}$.

i) Recordemos lo siguiente.

1) Los Números de Stirling de segunda especie $\mathbb{S}$, *están definidos como,*

$$S(n,m) = S(n-1,m-1) + mS(n-1,m)$$

2) Números de Stirling de primera especie $\mathbb{T}$, *están definidos como,*

$$s(n,m) = s(n-1,m-1) + (n-1)s(n-1,m)$$

Entonces, se pueden demostrar los siguientes enunciados.

a_1*)* $\mathbb{S}^{-1}(n,m) = (-1)^{n+m}\mathbb{T}(n,m)$

a_2*)*

$$\sum_{k=0}^{n}{}_{\mathbb{S}}\, f(k) = g(n) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}{}_{\mathbb{T}}\, (-1)^k g(k) = (-1)^n f(n)$$

a_3 *)*

$$\sum_{k=0}^{n}{}_{[p,\mathbb{S}]}\, f(k) = \sum_{k=0}^{n} \vartheta_p^{\mathbb{S}}(n,k) f(k)$$

ii) Coeficientes Gaussianos $\mathbb{G}$, se definen de forma recurrente como,

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_q + q^m \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}_q \quad \forall q \in \mathbb{C}.$$

Entonces, se pueden demostrar los siguientes enunciados.

b_1)

$$\sum_{k=0}^{n}{}_{\mathbb{G}} f(k) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q f(k)$$

b_2) $\forall h, g \in \mathbb{A}^*(\mathbb{N}^*)$

$$h(n) *^{\mathbb{G}} g(n) = g(n) *^{\mathbb{G}} h(n)$$

b_3) *Sean* $\varphi_0(n) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^k q^{\binom{k}{2}}$, $\varphi_1(n) = 1$ *y* $\varphi_{-1}(n) = (-1)^n q^{\binom{n}{2}}$.

Entonces definimos la siguiente función,

$$\varphi_p(n) = \begin{cases} \underbrace{\varphi_1(n) *^{\mathbb{G}} \cdots *^{\mathbb{G}} \varphi_1(n)}_{p-veces} & p > 0 \ , \\ \\ \varphi_0(n) & p = 0 \ , \\ \\ \underbrace{\varphi_{-1}(n) *^{\mathbb{G}} \cdots *^{\mathbb{G}} \varphi_{-1}(n)}_{q-veces} & p < 0, \ p = -q \ . \end{cases}$$

Demostrar que,

$$\vartheta_p^{\mathbb{G}}(n, m) = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q \varphi_p(n).$$

b_4)

$$\sum_{k=0}^{n}{}_{[p,\mathbb{G}]} f(k) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \varphi_p(k) f(n-k)$$

iii) Números de Catalán ordinarios, se definen de forma recurrente como,

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} \qquad y \qquad C_0 = 1$$

y como es sabido, su forma general esta dada por,

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Por otra parte, sea

$$F(n, k) = \begin{cases} C_{n-k} & k \leq n \ , \\ \\ 0 & k > n \ . \end{cases}$$

Y definamos la matriz infinita,

$$\mathbb{F} = (F(n,m))_{n,m=0}^{\infty}$$

Entonces se puede probar lo siguiente.

c_1*) Sean* $\varphi_1(n) = C_n$ *y* $\varphi_{-1}(n) = (-1)^{1-\left[\frac{1}{n+1}\right]} C_n$. *Entonces se tiene que,* $\varphi_1(n) * \varphi_{-1}(n) = \left[\dfrac{1}{n+1}\right]$

c_2*)*

$$\varphi_p(n) = \begin{cases} \underbrace{\varphi_1(n) * \cdots * \varphi_1(n)}_{p-veces} & p > 0\ , \\ \\ \left[\dfrac{1}{n+1}\right] & p = 0\ , \\ \\ \underbrace{\varphi_{-1}(n) * \cdots * \varphi_{-1}(n)}_{q-veces} & p < 0,\ p = -q\ . \end{cases}$$

Por lo tanto demostrar que,

$$\sum_{k=0}^{n}{}_{[p,\mathbb{F}]}\ f(k) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_p(k) f(n-k)$$

Estos ejemplos describen de forma general, la manera en que los operadores aditivos de origen matricial, cumplen la propiedad lineal en la iteración. Sin embargo, se debe aclarar que no todos lo operadores aditivos, tienen una representación matricial, como se pude ver cuando la suma se realiza sobre multi-índices. Es decir, se pueden definir operadores aditivos que cumplan la propiedad lineal en la iteración sin que cuenten con una representación matricial asociada.

Referencias

[1] Aigner, Martin. *A course in enumeration.* Springer Science & Business Media, 2007.

[2] Apostol, Tom M. *Introducción a la teoría analítica de números.* Reverté, 1984.

[3] Balanzario, Eugenio P. *Breviario de teoría analítica de los números.* Sociedad Matemática Mexicana, 2008.

[4] Bogart, Kenneth P. *Introductory combinatorics.* Saunders College Publishing, 1989.

[5] Comtet, Louis. *Analyse combinatoire: Vol. 1.* Presses Universitaires de France, 1970.

[6] Friedlander, John B. and Heath-Brown, DR and Iwaniec, H. and Kaczorowski, J. *Analytic number theory.* Springer, 1891.

[7] Gupta, Hansraj. *Selected topics in number theory.* Abacus Press, 1980.

[8] Ivic, Aleksandar. *The Riemann zeta-function: theory and applications.* Courier Corporation, 2012.

[9] Ríbnikov, Konstantin. *Análisis combinatorio.* Mir, 1988.

[10] Ríbnikov, Konstantin. *Análisis combinatorio: problemas y ejercicios.* Mir, 1989.

[11] Rosen, Kenneth H. *Handbook of discrete and combinatorial mathematics.* CRC Press, 2000.

[12] Rota, Gian-Carlo and Doubilet, P. *Finite operator calculus.* Academic Press, 1975.