Iteraciones sobre el operador Σ respecto de conjuntos de números Natulares y su representación matricial

Mat. Enrique Torres Miguel

kike_torres@ciencias.unam.mx

25 de septiembre de 2021

Resumen

Se estudian los operadores discretos aditivos con representación matricial asociados a subconjunto de $\mathbb{N}$, los cuales provistos con el orden usual de $\mathbb{N}$, definen matrices triangulares infinitas con entradas de ceros y unos, se introducen los conceptos de iterada sobre estos operadores mostrando con tres ejemplos la propiedad lineal de la iteración.

1. Introducción

La referencia obligada para este texto son las álgebras de incidencias que son las que fundamentan de forma general las iteraciones sobre los operadores aditivos con representación matricial. Sin embrago, es conveniente introducir varios de los conceptos desde un punto de vista elemental que sirve como referencia para los casos generales, en este contexto hemos optado por presentar el concepto de suma sobre conjuntos números Naturales, es decir, asociando al operador Σ ciertos conjuntos de números Naturales, definiendo así operadores aditivos que pueden ser iterados sobre las funciones aritméticas y mostrando que dichas iteraciones cumplen la propiedad lineal fundamentada en el álgebra matricial asociada a los conjunto de números naturales sobre los que se realiza suma. Para un estudio detallado y completo se puede revisar las referencias, de igual forma es conveniente estar familiarizado con la notación usada en Iteraciones sobre el operador Σ respecto de los conjuntos de factores los números Naturales y algunos ejemplos.

Para empezar recordemos algunos conceptos básicos de subconjuntos de $\mathbb{N}$.

Observación 1.1 *Sea* $P_F(\mathbb{N}) = \{A \subset \mathbb{N} \,:\, 0 < |A| \,,\, |A| \in \mathbb{N}\}$ *el conjunto de subconjuntos finitos no vacíos del conjunto* $\mathbb{N}$.

i)Entonces podemos notar que $\forall B \in P_F(\mathbb{N})$ *existe un conjunto* $C_B \in P_F(\mathbb{N})$ *tal que* $C_B = \{1, 2, ..., n_B\}$ *donde* $n_B = |B|$, *además como es usual sea* $S_{n_B} = S(C_B) = \{\varepsilon : C_B \to B \mid \varepsilon \quad es \quad biyectiva\}$.

ii) Por otro lado, sí $A(P_F(\mathbb{N})) = \{k \mid k : P_F(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}\}$ *y* $\Lambda_F(\mathbb{N}) = \{\alpha \mid \quad : \mathbb{N} \to P_F(\mathbb{N})\}$, *entonces* $f = \alpha \circ k \in A(\mathbb{N})$ *para cada* $\alpha \in \Lambda_F(\mathbb{N})$ *y* $k \in A(P_F(\mathbb{N}))$.

Observación 1.2 *Para cualquier* $\gamma \in \Lambda_F(\mathbb{N}) = \{\alpha \mid \alpha : \mathbb{N} \to P(\mathbb{N})\}$ *se puede asociar una matriz infinita* $\mathbb{E}_\gamma \in M_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C})$ *definida como*
$\mathbb{E}_\gamma = [E(n,m)]_{n\in\mathbb{N}}^{m\in\mathbb{N}}$ *tal que*

$$\mathbb{E}_\gamma(n,m) = \begin{cases} 1, & m \in A_n = \gamma(n), \\ 0, & m \notin A_n = \gamma(n). \end{cases}$$

Y por último, veamos la siguiente definición.

Definición 1.3 *Sean* $f \in A(\mathbb{N}), B \in P_F(\mathbb{N})$ *y* $\varepsilon \in S(C_B)$, *entonces diremos que la suma de la función f sobre el operador* $\sum_{p\in B}[\ \ ]$ *está dada como,*

$$\sum_{p\in B} f(p) = \sum_{k=1}^{n_B} f(\varepsilon(k)).$$

2. Nociones de conjuntos asociados a la definición de los operadores $\sum_{d|n}[\ \ ]$ y $\sum_{k=1}^{n}[\ \ ]$

Ahora que ya contamos con las herramientas suficientes, empezaremos por comparar la relación que existe entre os operadores $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ y $\sum_{d|n} f(d)$. Primero, veamos que estos operadores tienen la misma naturaleza, ambos representan una suma cuando se aplican a los elementos del conjunto $A(\mathbb{N})$, para cada número natural n, con la diferencia que el conjunto finito de números naturales sobre el que se realiza la suma en cada caso es distinto, veamos esto a detalle.

Observación 2.1

i)Cuando ocupamos el operador $\sum_{k=1}^{n}[\ \ ]\forall n \in \mathbb{N}$, *estamos asociando al operador* $\sum$ *una función* $\beta \in \Lambda_F(\mathbb{N}) = \{\alpha \mid \alpha : \mathbb{N} \to P_F(\mathbb{N})\}$, *es decir, le asociamos una sucesión de subconjuntos de números naturales tales que*

$$\beta(n) = B_n = \{m \in \mathbb{N} \ : \ 1 \le m \le n\} \, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, podemos escribir $\sum_{k=1}^{n}[\ \ ]$ *como* $\sum_{p\in B_n=\beta(n)}[\ \ ]$.

Además, según la ***Observación 2.1*** *a cada* $B_n = \beta(n)$ *le asociamos una función* $\varepsilon_n \in S(B_n)$ *tal que* $\varepsilon_n(p) = p$, *ya que en este caso se tiene que* $C_{B_n} = B_n, \forall n \in \mathbb{N}$. *Por tanto, si denotamos como* $\le$ *al orden usual de los números Naturales, entonces* $\varepsilon_n : (C_{B_n}, \le) \to (B_n, \le)$ *es un isomorfismo* $\forall n \in \mathbb{N}$, *esto último indica el orden en el que se tomarán a los elementos de* $B_n = \beta(n)$ *cuando se realice la suma.*

ii)Análogamente al inciso anterior, cuando se utiliza el operador $\sum_{d|n}[\ ]\,\forall n\in\mathbb{N}$, *estamos asociando al operador* $\sum$ *una función* $\alpha\in\Lambda_F(\mathbb{N})=\{\alpha\mid\alpha:\mathbb{N}\to P_F(\mathbb{N})\}$. *Esto es, le asociamos una sucesión de subconjuntos de números naturales tales que,* $\alpha(n)=A_n=\{d\in\mathbb{N}:d|n\}\,\forall n\in\mathbb{N}$. *Por lo tanto, podemos escribir* $\sum_{d|n}[\ ]\,\forall n\in\mathbb{N}$ *como*

$$\sum_{p\in A_n=\alpha(n)}[\ ]\,\forall n\in\mathbb{N}$$

y según ***Observación 1.1*** *a cada* $A_n=\alpha(n)$ *le asociamos una función* $\varepsilon_n\in S(A_n)$ *tal que* $\varepsilon_n:(C_{A_n},\le)\to(A_n,\le)$ *es un isomorfismo* $\forall n\in\mathbb{N}$.

Entonces, podemos notar que la diferencia fundamental que existe entre los operadores $\sum_{d|n}[\ ]$ y $\sum_{k=1}^{n}[\ ]$ surge porque en cada caso se asocia una función $\gamma\in\Lambda_F(\mathbb{N})$ diferente al operador $\sum$ además de una sucesión de isomorfismo $\varepsilon_n:(C_{D_n},\le)\to(D_n,\le)$ (con el orden usual de $\mathbb{N}$) tales que $D_n=\gamma(n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Por otro lado, sí aplicamos la **Definición 1.3** a cualquiera de los casos anteriores conservando la notación utilizada en ellos tenemos que, $\forall f\in A(\mathbb{N})$, para cada $B_n=\beta(n)$ y $\varepsilon_n\in S(B_n)$ la suma de la función f sobre el operador

$$\sum_{p\in B_n=\beta(n)}[\ ]\,\forall n\in\mathbb{N}$$

está dada por la igualdad

$$\sum_{p\in\beta(n)}f(p)=\sum_{k=1}^{m_{\beta(n)}}f(\varepsilon_n(k))$$

y con ayuda de ésta podemos definir una función $k\in A(P_F(\mathbb{N}))$ tal que

$$k(B_n)=\sum_{p\in\beta(n)}f(p).$$

Y por otra parte como la suma describe una función aritmética, entonces existe una función $g\in A(\mathbb{N})$ tal que

$$g(n)=\sum_{p\in\beta(n)}f(p).$$

Pero esto nos genera un problema, ya que cuando aplicábamos el operador

$$\sum_{p\in B_n=\beta(n)}[\ ]$$

sobre el conjunto $A(\mathbb{N})$ obteníamos una única función $g \in A(\mathbb{N})$ y ahora también debemos de asociar una función $k \in A(P_F(\mathbb{N}))$ que tiene una naturaleza distinta a las funciones aritméticas. Sin embargo, esto no debería sorprendernos y menos causarnos algún conflicto puesto que la función $g \in A(\mathbb{N})$ y la función $k \in A(P_F(\mathbb{N}))$ denotan la misma suma

$$\sum_{p\in\beta(n)} f(p) = \sum_{k=1}^{m_{\beta(n)}} f(\varepsilon_n(k)) \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esto es claro, por la **Observación 1.1** se tiene que que $g = \beta\circ k \in A(\mathbb{N})$ donde $\beta \in \Lambda_F(\mathbb{N})$ y $k \in A(P_F(\mathbb{N}))$.

Por lo tanto, reescribiendo lo anterior tenemos que $\forall f \in A(\mathbb{N})$, para cada $B_n = \beta(n)$ y $\varepsilon_n \in S(B_n)$ tales que

$$\varepsilon_n : (C_{B_n}\ , \leq)\rightarrow(B_n\ , \leq)$$

es un isomorfismo, entonces la suma de la función f sobre el operador

$$\sum_{p\in B_n=\beta(n)} [\ ]$$

define una función aritmética g dada por la igualdad

$$g(n) = \beta \circ k(n) = \sum_{p\in\beta(n)} f(p)$$

donde $k \in A(P_F(\mathbb{N}))$ está dada como

$$k(B_n) = \sum_{p\in\beta(n)} f(p)\, \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. Definiciones

El análisis del apartado anterior nos permite visualizar el tipo de generalizaciones que haremos a continuación, éstas consistirán en asociar elementos del conjunto $\Lambda(P_F(\mathbb{N}))$ con el operador $\sum$ y sobre dichas asociaciones estableceremos nuevas definiciones. Nos vamos a restringir al conjunto

$$\Omega(P_F(\mathbb{N})) = \{\alpha \in \Lambda(P_F(\mathbb{N})) \;:\; \{n\} \subseteq \alpha(n) \subseteq \{1, ..., n\} \quad \forall n \in \mathbb{N}\},$$

ya que, según la **Observación 1.2** a cada $\alpha \in \Omega(P_F(\mathbb{N}))$ le podemos asociar una matriz triangular inferior infinita invertible con entradas complejas, en particular a $\Omega(P_F(\mathbb{N}))$ se le pueden asociar matrices invertibles de ceros y unos. Primero, establezcamos la siguiente definición,

Definición 3.1 *Sean $f \in A(\mathbb{N})$ y $\beta \in \Omega(P_F(\mathbb{N}))$. Además, a cada $B_n = \beta(n)$ le asociamos una función $\varepsilon_n \in S(B_n)$ tal que $\varepsilon_n : (C_{B_n}, \leq) \to (B_n, \leq)$ es un isomorfismo $\forall n \in \mathbb{N}$ con el orden usual de $\mathbb{N}$, entonces diremos que la suma de la función f sobre el operador*

$$\sum_{p \in B_n = \beta(n)} [\;\;] \, \forall n \in \mathbb{N}$$

es una función aritmética g definida por la igualdad

$$g(n) = \beta \circ k(n) = \sum_{p \in \beta(n)} f(p)$$

donde $k \in A(P_F(\mathbb{N}))$ está dada por

$$k(B_n) = \sum_{p \in \beta(n)} f(p) \, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Recordando que por la **Definición 1.3**, la igualdad

$$g(n) = \beta \circ k(n) = \sum_{p \in \beta(n)} f(p)$$

está definida como

$$\sum_{p \in \beta(n)} f(p) = \sum_{k=1}^{r} f(\varepsilon_n(k))$$

donde $r = |\beta(n)| \; \forall n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, vemos lo siguiente,

Definición 3.2 *Sean $f \in A(\mathbb{N})$ y $\beta \in \Omega(P_F(\mathbb{N}))$. Además, a cada $B_n = \beta(n)$ le asociamos una función $\varepsilon_n \in S(B_n)$ tal que $\varepsilon_n : (C_{B_n}, \leq) \to (B_n, \leq)$ es un isomorfismo con el orden usual de $\mathbb{N}$, entonces definimos la función $\hat{f}$ como*

$$\hat{f}(p) = f(\varepsilon_n(r + 1 - k)) \quad \forall p \in B_n, \, p = \varepsilon_n(k)$$

donde $r = |\beta(n)| \;\; \forall n \in \mathbb{N}$.

Y con esto podemos ver lo siguiente.

Observación 3.3 *Sean* $\alpha, \beta \in \Omega(P_F(\mathbb{N}))$ *tales que,* $\alpha(n) = A_n$ *y* $\beta(n) = B_n$. *Entonce es inmediato que,*

i) $\gamma(n) := \alpha(n) \cup \beta(n) \Rightarrow \gamma \in \Omega(P_F(\mathbb{N}))$

ii) $\gamma(n) := \alpha(n) \cap \beta(n) \Rightarrow \gamma \in \Omega(P_F(\mathbb{N}))$

Así, utilizando las definiciones anterior se tiene que,

Definición 3.4 *Sean* $f \in A(\mathbb{N})$ *y* $\beta \in \Omega(P_F(\mathbb{N}))$. *Además, a cada* $B_n = \beta(n)$ *se asocia una función* $\varepsilon_n \in S(B_n)$ *tal que* $\varepsilon_n : (C_{B_n}, \leq) \rightarrow (B_n, \leq)$ *es un isomorfismo con el orden usual de* $\mathbb{N}$. *Entonces* $\forall m \in \mathbb{N}$ *diremos que la función iterada de grado* m *de la función* f *sobre el operador*

$$\sum_{p \in B_n = \beta(n)} [\ ]$$

es una función aritmética h *tal que*

$$h(n) = \sum_{p_1 \in \beta(n)} \sum_{p_2 \in \beta(p_1)} \cdots \sum_{p_{m-1} \in \beta(p_{m-2})} \sum_{p_m \in \beta(p_{m-1})} f(p_m)\, \forall n \in \mathbb{N}$$

y la denotaremos como

$$\sum_{p \in \beta(n)}{}_m f(p).$$

Observación 3.5 *Sea* $f \in A(\mathbb{N})$, *entonces diremos que* f *es su función iterada de grado 0 sobre el operador*

$$\sum_{p \in B_n = \beta(n)} [\ ]$$

y denotaremos esto como

$$f(n) = \sum_{p \in \beta(n)}{}_0 f(p).$$

Análogamente,

Definición 3.6 *Sean* $f \in A(\mathbb{N})$ *y* $\beta \in \Omega(P_F(\mathbb{N}))$. *Además, a cada* $B_n = \beta(n)$ *le asociamos una función* $\varepsilon_n \in S(B_n)$ *tal que* $\varepsilon_n : (C_{B_n}, \leq) \rightarrow (B_n\ , \leq)$ *es un isomorfismo con el orden usual de* $\mathbb{N}$, *entonces* $\forall m \in \mathbb{N}$ *diremos que la función iterada inversa (dual o reciproca de grado* m*) de grado* $-m$ *de la función* f *sobre el operador*

$$\sum_{p \in B_n = \beta(n)} [\ ]$$

es una función aritmética h *tal que,*

$$f(n) = \sum_{p_1 \in \beta(n)} \sum_{p_2 \in \beta(p_1)} \cdots \sum_{p_{m-1} \in \beta(p_{m-2})} \sum_{p_m \in \beta(p_{m-1})} h(p_m)\, \forall n \in \mathbb{N}$$

y la denotaremos como,

$$\sum_{p\in\beta(n)}{}_{-m} f(p).$$

Ahora daremos la definición el producto de Cauchy en términos de esta sección.

Definición 3.7 *Sean $f, g \in A(\mathbb{N})$ y $\beta \in \Omega(P_F(\mathbb{N}))$. Además, a cada $B_n = \beta(n)$ se asocia una función $\varepsilon_n \in S(B_n)$ tal que $\varepsilon_n : (C_{B_n}, \leq) \to (B_n, \leq)$ es un isomorfismo con el orden usual de $\mathbb{N}$, entonces definimos el producto o convolución de Cauchy de las funciones aritméticas f y g como*

$$f * g(n) = \sum_{p\in\beta(n)} \hat{f}_n(p)g(p) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cabe mencionar que este producto es conmutativo por su definición.

Definición 3.8 *Sean $n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}$ y $\beta \in \Omega(P_F(\mathbb{N}))$. Además, a cada $B_n = \beta(n)$ le asocia una función $\varepsilon_n \in S(B_n)$ tal que $\varepsilon_n : (C_{B_n}, \leq) \to (B_n, \leq)$ es un isomorfismo $\forall n \in \mathbb{N}$ con el orden usual de $\mathbb{N}$, y consideremos la matriz $T_\beta = [\theta(n,m)]_{n\in\mathbb{N}}^{m\in\mathbb{N}}$*

$$\theta(n,m) = \begin{cases} 1, & m \in B_n = \beta(n) \ , \\ 0, & m \notin B_n = \beta(n). \end{cases}$$

Entonces definimos la siguiente función;

$$\varrho_p^{T_\beta}(s,t) = [\Pi_n^p(T_\beta)]_s^t = T_\beta^p(s,t) \quad \forall s,t \in \mathbb{N}.$$

Para finalizar la sección no queda más que dar el resultado de linealidad respecto a la iteración sobre las funciones aritméticas.

Teorema 3.9 *Sean $f \in A(\mathbb{N})$, $n \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Z}$ y $\beta \in \Omega(P_F(\mathbb{N}))$. Entonces se tiene que*

$$\sum_{p\in\beta(n)}{}_{q} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \varrho_q^{T_\beta}(n,k) f(k).$$

Demostración. *Se sigue de las propiedades matriciales.* ■

Con este resultado terminamos el estudio la propiedad lineal en la iteración del operador Suma sobre las funciones aritméticas respecto a conjuntos finitos de números naturales restringidos a $\Omega(P_F(\mathbb{N}))$, lo cual es un caso particular de los operadores aditivos definidos respecto de matrices, ya que lo anteriormente expuesto solo considera matrices infinitas de ceros y unos.

4. Ejemplos

Ejemplo 4.1 *Sea* $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ *y* $f, g \in \mathbb{A}(\mathbb{N})$. *Definimos la matriz* $\mathbb{B} = [B(n,m)]_{n,m,\in\mathbb{N}}$ *tal que,*

$$B(n,m) = \begin{cases} 1, & m \in A_n \ , \\ \\ 0 & m \notin A_n. \end{cases}$$

donde,

$$A_n = \{m \in \mathbb{N} : m \nmid n \ o \ m = n\}$$

Por otra parte, denotaremos al operador aditivo asociado como, $\sum_{\substack{d \le n: \, d \nmid n \\ d = n}} [\ ]$.

Es claro que, $\sum_{\substack{d \le n: \, d \nmid n \\ d = n}} [\ ] \equiv \sum_{d \in A_n} [\ ] \equiv \sum_{k=1}^{n} {}_{\mathbb{B}} [\ ]$.

Además, resulta inmediato que,

$$\sum_{\substack{d \le n: \, d \nmid n \\ d = n}} 1 = n - \delta_2(n) + 1$$

Por otra parte, suponiendo que,

$$g_m(n) = \sum\nolimits_{\substack{d \le n: \, d \nmid n \\ d = n}}^{m} f(d)$$

Mostraremos con cálculos numérico la teoría, para esto vamos a hallar, $\sum\nolimits_{\substack{d \le 7: \, d \nmid 7 \\ d = 7}}^{3} f(d)$.

Solución. *Veamos que por la definición,*

$$\begin{aligned}
g_1(1) &= f(1) \\
g_1(2) &= f(2) \\
g_1(3) &= f(2) + f(3) \\
g_1(4) &= f(3) + f(4) \\
g_1(5) &= f(2) + f(3) + f(4) + f(5) \\
g_1(6) &= f(4) + f(5) + f(6) \\
g_1(7) &= f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7)
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$
\begin{aligned}
g_2(1) &= g_1(1) = f(1)\\
g_2(2) &= g_1(2) = f(2)\\
g_2(3) &= g_1(2) + g_1(3) = 2f(2) + f(3)\\
g_2(4) &= g_1(3) + g_1(4) = f(2) + 2f(3) + f(4)\\
g_2(5) &= g_1(2) + g_1(3) + g_1(4) + g_1(5) = 3f(2) + 3f(3) + 2f(2) + f(5)\\
g_2(6) &= g_1(4) + g_1(5) + g_1(6) = f(2) + 2f(3) + 3f(4) + 2f(5) + f(6)\\
g_2(7) &= g_1(2) + g_1(3) + g_1(4) + g_1(5) + g_1(6) + g_1(7)\\
&= 4f(2) + 4f(3) + 4(4) + 3f(5) + 2f(6) + f(7)
\end{aligned}
$$

Por último,

$$
\begin{aligned}
g_3(1) &= g_2(1) = f(1)\\
g_3(2) &= g_2(2) = f(2)\\
g_3(3) &= g_2(2) + g_2(3) = 3f(2) + f(3)\\
g_3(4) &= g_2(3) + g_2(4) = 3f(2) + 3f(3) + f(4)\\
g_3(5) &= g_2(2) + g_2(3) + g_2(4) + g_2(5) = 7f(2) + 6f(3) + 3f(2) + f(5)\\
g_3(6) &= g_2(4) + g_2(5) + g_2(6) = 5f(2) + 7f(3) + 6f(4) + 3f(5) + f(6)\\
g_3(7) &= g_2(2) + g_2(3) + g_2(4) + g_2(5) + g_2(6) + g_2(7)\\
&= 12f(2) + 12f(3) + 10(4) + 6f(5) + 3f(6) + f(7)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\sum_{d\leq 7:\ \substack{d\nmid 7\\ d=7}}^{}{}_{3}\ f(d) &= \sum_{d\in A_7}{}_{3}\, f(d)\\
&= \sum_{d_1\in A_7}\ \sum_{d_2\in A_{d_1}}\ \sum_{d_3\in A_{d_2}} f(d_3)\\
&= 12f(2) + 12f(3) + 10(4) + 6f(5) + 3f(6) + f(7)
\end{aligned}
$$

Ahora, procedemos usando la propiedad lineal de la iteración fundamentada por el álgebra de matrices.

Por la definición de $\mathbb{B}$ tenemos que, $B_{7x7} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0\\ 0&1&1&1&1&0&0\\ 0&0&0&1&1&1&0\\ 0&1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}$.

Entonces, $B^2_{7x7} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&2&1&0&0&0&0\\ 0&1&2&1&0&0&0\\ 0&3&3&2&1&0&0\\ 0&1&2&3&2&1&0\\ 0&4&4&4&3&2&1 \end{pmatrix}$ *y* $B^3_{7x7} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&3&1&0&0&0&0\\ 0&3&3&1&0&0&0\\ 0&7&6&3&1&0&0\\ 0&5&7&6&3&1&0\\ 0&12&12&10&6&3&1 \end{pmatrix}$

Por otro lado,

$$\vartheta_3^{\mathbb{B}}(n,m) = B_{7x7}^3(n,m)$$

Así,

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{d\leq 7:\ d\nmid 7 \\ d=7}}^{3} f(d) &= \sum_{k=1}^{7}{}_{[3,\mathbb{B}]} f(k) \\
&= \sum_{k=1}^{7} \vartheta_3^{\mathbb{B}}(n,k) f(k) \\
&= 12f(2) + 12f(3) + 10(4) + 6f(5) + 3f(6) + f(7)
\end{aligned}$$

■

Ejemplo 4.2 *Sea* $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ *y* $f, g \in \mathbb{A}(\mathbb{N})$. *Definimos la matriz* $\mathbb{B} = [B(n,m)]_{n,m,\in\mathbb{N}}$ *tal que,*

$$B(n,m) = \begin{cases} 1, & m \in A_n \ , \\ \\ 0 & m \notin A_n. \end{cases}$$

donde,

$$A_n = \{m \leq n : (n,m) = 1 \ o \ m = n\}$$

Por otra parte, denotaremos al operador aditivo asociado como, $\sum\limits_{\substack{d\leq n:\ (d,n)=1 \\ d=n}} [\ ]$.

Es claro que, $\sum\limits_{\substack{d\leq n:\ (d,n)=1 \\ d=n}} [\ ] \equiv \sum\limits_{d\in A_n} [\ ] \equiv \sum\limits_{k=1}^{n}{}_{\mathbb{B}} [\ ]$.

Además, resulta inmediato que,

$$\sum_{\substack{d\leq n:\ (d,n)=1 \\ d=n}} 1 = \phi(n) + 1 - \left[\frac{1}{n}\right]$$

Por otra parte, suponiendo que,

$$g_m(n) = \sum_{\substack{d\leq n:\ (d,n)=1 \\ d=n}}^{m} f(d).$$

Hallaremos, $\sum\limits_{\substack{d\leq 5:\ (d,5)=1 \\ d=5}}^{-1} f(d)$.

Solución. *Veamos que, por la definición del operador aditivo se tiene que,*

$$\sum_{\substack{d\leq 5:\,(d,5)=1\\ d=5}}{}_{-1} f(d) = g_{-1}(5) \Rightarrow f(n) = \sum_{\substack{d\leq 5:\,(d,5)=1\\ d=5}} g_{-1}(d)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
f(1) &= g_{-1}(1)\\
f(2) &= g_{-1}(1) + g_{-1}(2)\\
f(3) &= g_{-1}(1) + g_{-1}(2) + g_{-1}(3)\\
f(4) &= g_{-1}(1) + g_{-1}(3) + g_{-1}(4)\\
f(5) &= g_{-1}(1) + g_{-1}(2) + g_{-1}(3) + g_{-1}(4) + g_{-1}(5)
\end{aligned}$$

Entonces resolviendo,

$$\begin{aligned}
g_{-1}(1) &= f(1)\\
g_{-2}(1) &= f(2) - f(1)\\
g_{-1}(3) &= f(3) - f(2)\\
g_{-1}(4) &= f(4) - f(3) + f(2) - f(1)\\
g_{-1}(5) &= f(5) - f(4) - f(2) + f(1)
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{d\leq 5:\,(d,5)=1\\ d=5}}{}_{-1} f(d) &= \sum_{d\in A_5}{}_{-1} f(d)\\
&= g_{-1}(5)\\
&= f(5) - f(4) - f(2) + f(1)
\end{aligned}$$

Ahora, procedemos usando la propiedad lineal de la iteraión.
Por la definición de $\mathbb{B}$ *tenemos que,* $B_{5x5} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&0\\ 1&0&1&1&0\\ 1&1&1&1&1 \end{pmatrix}$.
Entonces, $B_{5x5}^{-1} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ -1&1&0&0&0\\ 0&-1&1&0&0\\ -1&1&-1&1&0\\ 1&-1&0&-1&1 \end{pmatrix}$
Por otro lado,

$$\vartheta^{\mathbb{B}}_{-1}(n,m) = B_{5x5}^{-1}(n,m)$$

Así,

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{d\leq 5:\,(d,5)=1\\ d=5}}{}_{-1} f(d) &= \sum_{k=1}^{5}{}_{[-1,\mathbb{B}]} f(k)\\
&= \sum_{k=1}^{5} \vartheta^{\mathbb{B}}_{-1}(n,k)f(k)\\
&= f(5)-f(4)-f(2)+f(1)
\end{aligned}$$

■

Ejemplo 4.3 *Sea* $n,t\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{Z}$, $z\in\mathbb{C}$, *y* $f,g\in\mathbb{A}(\mathbb{N})$. *Definimos* $\mathbb{B}=[B(n,m)]_{n,m,\in\mathbb{N}}$ *tal que,* $\mathbb{B}=[B(n,m)]_{n,m,\in\mathbb{N}}$ *tal que,*

$$B(n,m)=\begin{cases}1, & m\in A_n\ ,\\ \\ 0 & m\notin A_n.\end{cases}$$

donde,

$$A_n=\{m\leq n:\delta(m)=2\ \ o\ m=n\}.$$

Por otra parte, denotaremos al operador aditivo asociado como, $\displaystyle\sum_{\substack{d\leq n:\,\delta(d)=2\\ d=n}}[\ ]$.

Es claro que, $\displaystyle\sum_{\substack{d\leq n:\,\delta(d)=2\\ d=n}}[\ ]\equiv\sum_{d\in A_n}[\ ]\equiv\sum_{k=1}^{n}{}_{\mathbb{B}}[\ ]$.

Ahora definamos las siguientes función aritmética sobre $\displaystyle\sum_{\substack{d\leq n:\,\delta(d)=2\\ d=n}}[\ ]$,

a_1*)* $\displaystyle\xi(n)=\sum_{\substack{d\leq n:\,\delta(d)=2\\ d=n}}1$, *es claro que* $\xi(n)=|A_n|$.

a_2*)* $\varpi(n)=\begin{cases}1, & \delta(n)\leq 2\ ,\\ \\ 0 & \delta(n)>2.\end{cases}$

Por otro lado, de la definición del operador aditivo $\displaystyle\sum_{\substack{d\leq n:\,\delta(d)=2\\ d=n}}[\ ]$ *y usando las definiciones conocidas de la funciones aritméticas* μ,φ,δ. *Demostrar que,*

i)

$$\xi_p(n)=\sum_{\substack{d\leq n:\,\delta(d)=2\\ d=n}}{}_{p-1}1\ \Leftrightarrow\xi_m(n)=\theta_p\circ\xi(n)$$

donde, $\theta_p(t) = \begin{cases} \frac{p^{\overline{t-1}}}{(t-1)!}, & p \neq 0, \\ \left[\frac{1}{t}\right], & p = 0. \end{cases}$

ii)

$$\sum_{\substack{d \leq n:\, \delta(d)=2 \\ d=n}}{}_{p} f(d) = \sum_{\substack{d \leq n:\, \delta(d)=2 \\ d=n}} \hat{f}(d)\xi_p(d)$$

iii)

$$\sum_{\substack{d \leq n:\, \delta(d)=2 \\ d=n}} \delta(d) = 2\xi(n) + \delta(n) + \left[\frac{1}{n}\right] - 3$$

iv)

$$\sum_{\substack{d \leq n:\, \delta(d)=2 \\ d=n}} (d - \phi(d)) = (n - \phi(n)) + \xi(n) + \left[\frac{1}{n}\right] - 2$$

v)

$$\sum_{\substack{d \leq n:\, \delta(d)=2 \\ d=n}} \varpi(d) = \xi(n) - \varpi(n) + 1.$$

vi)

$$\sum_{\substack{d \leq n:\, \delta(d)=2 \\ d=n}} (\varpi(d) + \mu(d)) = \mu(n) + \varpi(n) + 2.$$

vii) Sea

$$\xi_z(n) := \theta_z \circ \xi(n)$$

donde,

$$\theta_z(t) = \begin{cases} \frac{z^{\overline{t-1}}}{(t-1)!}, & z \neq 0, \\ \left[\frac{1}{t}\right], & z = 0. \end{cases}$$

y definamos

$$\sum_{\substack{d \leq n:\, \delta(d)=2 \\ d=n}}{}_{z} f(d) := \sum_{\substack{d \leq n:\, \delta(d)=2 \\ d=n}} \hat{f}(d)\xi_z(d).$$

Entonces probar que,

$$\sum_{\substack{d \leq n:\, \delta(d)=2 \\ d=n}}{}_{\frac{1}{2}} f(d) = \sum_{\substack{d \leq n:\, \delta(d)=2 \\ d=n}} \hat{f}(d) \frac{2\xi(n)}{2^{2\xi(d)}(2\xi(d)-1)} \binom{2\xi(d)}{\xi(d)}$$

Referencias

[1] Aigner, Martin. *A course in enumeration.* Springer Science & Business Media, 2007.

[2] Apostol, Tom M. *Introducción a la teoría analítica de números.* Reverté, 1984.

[3] Balanzario, Eugenio P. *Breviario de teoría analítica de los números.* Sociedad Matemática Mexicana, 2008.

[4] Bogart, Kenneth P. *Introductory combinatorics.* Saunders College Publishing, 1989.

[5] Comtet, Louis. *Analyse combinatoire: Vol. 1.* Presses Universitaires de France, 1970.

[6] Friedlander, John B. and Heath-Brown, DR and Iwaniec, H. and Kaczorowski, J. *Analytic number theory.* Springer, 1891.

[7] Gupta, Hansraj. *Selected topics in number theory.* Abacus Press, 1980.

[8] Ivic, Aleksandar. *The Riemann zeta-function: theory and applications.* Courier Corporation, 2012.

[9] Ríbnikov, Konstantin. *Análisis combinatorio.* Mir, 1988.

[10] Ríbnikov, Konstantin. *Análisis combinatorio: problemas y ejercicios.* Mir, 1989.

[11] Rosen, Kenneth H. *Handbook of discrete and combinatorial mathematics.* CRC Press, 2000.

[12] Rota, Gian-Carlo and Doubilet, P. *Finite operator calculus.* Academic Press, 1975.

[13] Vinográdov, Iván M. *Fundamentos de la teoría de los números.* Mir, 1997.